



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**OPTIMALIZACE MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ TĚLESA
OBTÉKANÉHO VZDUCHEM**

OPTIMIZATION OF MODAL PROPERTIES OF THE BODY IN THE AIR FLOW

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Matějka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Skalka, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Jan Matějka**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Petr Skalka, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizace modálních vlastností tělesa obtékaného vzduchem

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Obtékané těleso bude buzeno střídavým odtrháváním Karmánových vírů, které vznikají při proudění média v oblasti určitých Reynoldsových čísel. Karmánovy víry jsou za jistých podmínek velmi nebezpečným jevem, který má za následek havárie konstrukcí, jejichž vlastní frekvence je shodná s frekvencí odtrhávání těchto vírů – nastává rezonanční stav. Bakalářská práce bude zaměřena na optimalizaci modálních vlastností obtékaného tělesa (za pomoci přidané hmotnosti) s cílem minimalizovat dopady přejezdu rezonančních frekvencí na obtékané těleso. Obtékané těleso bude obsahovat n -komor, které budou plněny vybraným médiem v závislosti na rychlosti proudění vzduchu.

Cíle bakalářské práce:

1. Provedení rešeršní studie
2. Vytvoření modelu obtékaného tělesa
3. Optimalizace modálních vlastností
4. Zhodnocení dosažených výsledků s ohledem na možné využití v praxi

Seznam doporučené literatury:

- KOŽEŠNÍK, J.: Kmitání mechanických soustav, Academia, Praha, 1979
- JULIŠ, K., BREPTA, R., a kol.: Mechanika - Dynamika, Technický průvodce 66., SNTL, Praha, 1987
- BREPTA, R., PŮST, L., TUREK, F.: Mechanické kmitání, Technický průvodce 71., Sobotáles, Praha, 1994
- ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L.: The Finite Element Method, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá analýzou dynamické odezvy obtékaného prutového tělesa, které je buzeno silovým působením vznikajícím při odtrhávání Karmánových vírů. V práci je navržen způsob realizace prutového tělesa, který zabrání vzniku rezonančních stavů a tím sníží negativní dopad silového působení na obtékané těleso. Způsob, jak zamezit vzniku rezonančních stavů, spočívá ve změně modálních vlastností prutového tělesa „za provozu“, a to změnou hmotnosti prutového tělesa v určitých jeho částech (komorách). Cílem práce bylo nalézt vhodné konfigurace rozložení přídatné hmotnosti (od média) v závislosti na rychlosti proudění vzduchu tak, aby silové působení Karmánových vírů mělo na analyzované prutové těleso minimální dopad.

KLÍČOVÁ SLOVA

optimalizace, rezonance, Karmánovy víry, modální vlastnosti, harmonická analýza

SUMMARY

The bachelor thesis deals with dynamic analysis of the rod body, which is excited by the Karmán vortices. In this thesis a method of countermeasure is also verified, which could be possibly used in order to suppress the state of resonance in the body and which could minimize the influence of the Karmán vortices on the structure. This method consists in change of the mass in specific parts of the body in order to change modal properties of this body. The main goal of the thesis is to find suitable configurations of the mass distribution depending on air flow velocity for purpose of minimalization the influence of the Karmán vortices on the construction. This is achieved by optimization of modal properties. The optimization is based on results of harmonic analysis and is considering possibility of practical use. The harmonic analysis is made by finite element method in ANSYS program.

KEY WORDS

optimization, resonance, Karmán vortices, modal properties, harmonic analysis

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

MATĚJKA, Jan. *Optimalizace modálních vlastností tělesa obtékaného vzduchem*. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125007>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Petr Skalka.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Optimalizace modálních vlastností prutového tělesa obtékaného vzduchem* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Petra Skalky, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny informační zdroje, které jsem v této práci použil.

V Brně 23.června 2020

.....

Jan Matějka

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji svému vedoucímu práce Ing. Petru Skalkovi, PhD., za vynikající odborné vedení, věcné připomínky a rady, ochotu a příkladnou spolupráci, bez níž by tato práce nemohla vůbec vzniknout. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, za jejich podporu, jak během tvorby této práce, tak v celém mém dosavadním studiu.

OBSAH

ÚVOD.....	- 10 -
1 PROBLÉMOVÁ SITUACE.....	- 11 -
2 FORMULACE PROBLÉMU.....	- 11 -
3 CÍLE PŘI ŘEŠENÍ PROBLÉMU	- 11 -
4 REŠERŠNÍ STUDIE	- 12 -
4.1 Vibrace tělesa způsobené obtékáním vzduchu	- 12 -
4.1.1 Obtékání těles.....	- 12 -
4.1.2 Mezní vrstva u zaobleného tělesa a odtržení víru	- 12 -
4.1.3 Karmánova vírová stezka	- 13 -
4.1.4 Strouhalovo číslo.....	- 13 -
4.1.5 Silové působení způsobené odtrháváním Karmánových vírů	- 14 -
4.1.6 Opatření proti působení Karmánových vírů.....	- 15 -
4.2 Analýza ohybového kmitání přímých nosníků.....	- 16 -
4.2.1 Bernoulliho-Eulerova teorie pro ustálené kmitání	- 16 -
4.2.2 Reyleighova a Timošenkova teorie pro ustálené kmitání	- 20 -
5 MODELOVÉ TĚLESO.....	- 22 -
5.1 Tvar a rozměry modelového tělesa	- 23 -
6 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ VLASTNÍCH FREKVENCÍ PRUTOVÉHO TĚLESA	- 24 -
7 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ.....	- 27 -
7.1 Model geometrie	- 27 -
7.2 Model materiálových vlastností.....	- 27 -
7.3 Model okrajových podmínek	- 27 -
7.4 Modální analýza.....	- 27 -
7.4.1 Frekvenční rozsah	- 28 -
7.5 Harmonická analýza	- 28 -
7.5.1 Model zatížení.....	- 28 -
7.5.2 Kombinace zaplavených komor	- 29 -
7.5.3 Realizace výpočtového modelování.....	- 29 -
8 VÝSLEDKY VÝPOČTOVÉHO MODELOVÁNÍ	- 31 -
8.1 Výsledky modální analýzy.....	- 31 -
8.2 Výsledky harmonické analýzy.....	- 31 -
9 OPTIMALIZACE MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ	- 34 -
9.1 Optimalizační funkce	- 34 -

9.2 Optimalizace a její výsledky	35 -
9.3 Modifikace optimalizace a její výsledky	36 -
10 DISKUZE NAD MOŽNÝM PRAKTICKÝM VYUŽITÍM	39 -
10.1 Aplikace v anténě vysílače	39 -
10.2 Větrná elektrárna.....	40 -
10.3 Další postup při realizaci v praxi	40 -
11 ZÁVĚR.....	41 -
POUŽITÉ LITERÁRNÍ ZDROJE	42 -
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	43 -
SEZNAM OBRÁZKŮ	44 -
SEZNAM TABULEK	44 -

ÚVOD

U mnoha staveb a velkých konstrukcí dochází k jejich rozkmitání vlivem působení větru. U spousty havárií konstrukcí stačilo působení větru již o malé rychlosti. Takovým případem je třeba Tacoma Narrows Bridge (most v USA) v roce 1940, kdy došlo ke zhroucení mostu právě vlivem odtrhávání vzdušných vírů, které rozkmitaly most do oblastí blízkých vlastním frekvencím mostu. [1]

Navzdory tomu, že k této havárii došlo téměř před osmdesáti lety, zůstává tento problém stále aktuálním. Konstrukteři po celém světě se snaží tomuto chování u staveb a výškových konstrukcí (komíny, vysílače, výškové budovy atd.) předejít. U spousty staveb se využívá tlumičů, které redukují výchylku při kmitání konstrukce, u jiných konstrukcí se pomocí aerodynamiky mění směr působení větru tak, aby odtrhávání Karmánových vírů mělo co nejmenší dopad na konstrukci.

Co když ale výše uvedené způsoby řešení problému nejsou (ať už z rozměrových či jiných technických důvodů) možné? V této situaci je možné snížit dopad působení větru na konstrukci změnou modálních vlastností.

1 PROBLÉMOVÁ SITUACE

U prutového tělesa (sloupu) obtékaného vzduchem dochází k jeho rozkmitání vlivem periodického buzení otrháváním vzdušných vírů od jeho povrchu. Pokud budicí frekvence dosáhne stejné hodnoty jako vlastní frekvence, nastává rezonanční stav, kdy výchylka narůstá do vysokých hodnot. Pokud v tomto stavu sloup setrvá i po krátkou dobu, může následně dojít k jeho havárii.

2 FORMULACE PROBLÉMU

Při obtékání prutového tělesa vzduchem je snahou předejít stavu rezonance, resp. tento stav potlačit takovým způsobem, aby amplituda výchylky měla v daný okamžik co nejmenší hodnotu. Jednou z možností potlačení rezonančních účinků je změna vlastní frekvence analyzovaného prutového tělesa, což je způsobeno změnou jeho hmotnosti. Změna hmotnosti se bude realizovat v předem definovaných komorách, a to jejich zaplavením kapalinou. Znalost optimální kombinace zaplavení těchto komor tak, aby výchylka pro danou budicí frekvenci byla co nejmenší, je klíčová.

3 CÍLE PŘI ŘEŠENÍ PROBLÉMU

Cíle bakalářské práce jsou, s ohledem na výše popsany problém, shrnuty do následujících bodů:

- Provést rešeršní studii, ve které bude popsán vliv působení Karmánových vírů na obtékané prutové těleso.
- Analyticky stanovit vlastní frekvence analyzovaného prutového tělesa.
- Vytvořit výpočtový model prutového tělesa (sloupu).
- Realizovat modální analýzu metodou konečných prvků (dále MKP) pro zjištění vlastních frekvencí prutového tělesa.
- Pomocí MKP realizovat harmonickou analýzu pro zjištění amplitudo-frekvenční odezvy prutového tělesa s ohledem na působení vzdušných vírů.
- Na základě výsledků modální a harmonické analýzy najít optimalizaci vhodné kombinace zaplavení komor prutového tělesa (sloupu) pro dané vnější silové působení.

4 REŠERŠNÍ STUDIE

4.1 Vibrace tělesa způsobené obtékáním vzduchu

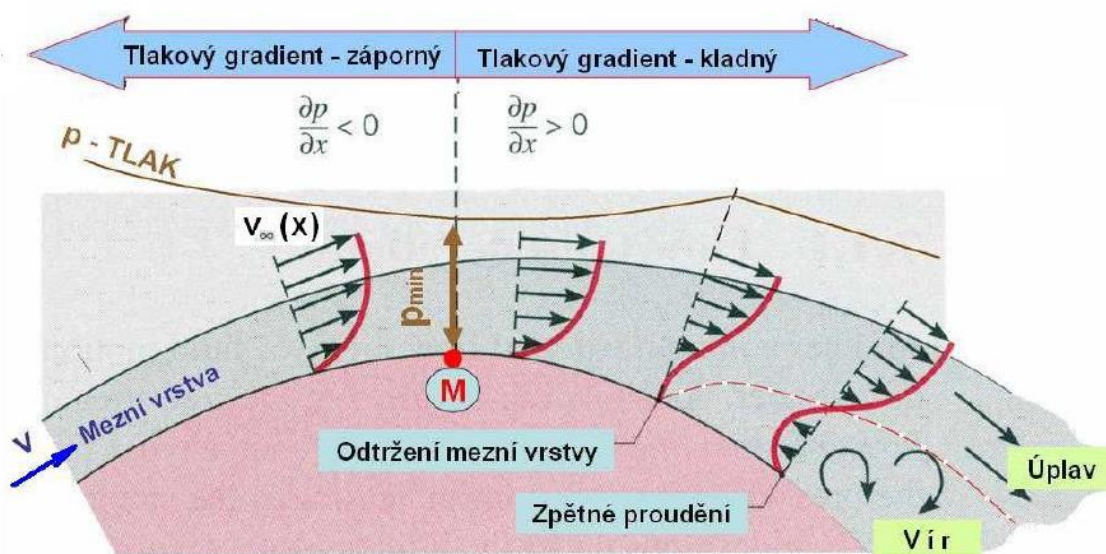
Rešeršní studie se zabývá příčinou vzniku vibrací způsobených odtrháváním vzdušných vírů od povrchu tělesa. V této bakalářské práci bylo uvažováno prutové těleso kruhového průřezu, jelikož na válcovém tělese byl tento jev nejvíce zkoumán a experimentálně popisován. [2]

4.1.1 Obtékání těles

Při obtékání tělesa médiem, ať už vodou či vzduchem, vznikají odporové síly. Odporovou sílu působící na obtékané těleso lze rozdělit do dvou složek. Na odporovou složku, která působí ve směru proudění kapaliny, a vztahovou složku, která působí ve směru příčném (kolmo na směr proudění). Bylo experimentálně prokázáno, že při vysokých hodnotách Reynoldsova čísla sahá vliv viskozity kapaliny pouze do malé vzdálenosti od povrchu tělesa. Tato vzdálenost se nazývá mezní vrstva. V určité části povrchu obtékaného tělesa se tato vrstva odtrhne a utvoří vír. Odtržené mezní vrstvě se říká úplav. [5]

4.1.2 Mezní vrstva u zaobleného tělesa a odtržení víru

U zaobleného tělesa (válec, koule) dochází na povrchu tělesa ke změně rychlosti. Jelikož platí zákon zachování energie, který je pro tento případ zastoupen Bernoulliho rovnicí, je nezbytné, aby zároveň docházelo i ke změně tlaku na tomto povrchu. [5] Co se děje na povrchu zaobleného tělesa, je popsáno na obr. 1.



Obr. 1- Odtržení mezní vrstvy na zakřiveném povrchu tělesa. (Převzato z [5])

Tlak vnějšího proudu klesá až do bodu M, kde je nejmenší. V této první oblasti je tlakový gradient $\partial p / \partial x < 0$ a rychlost v mezní vrstvě se tím pádem zvyšuje. V okamžiku, kdy proud kapaliny překoná bod zvratu M, dochází k nárůstu tlaku, tlakový gradient je $\partial p / \partial x > 0$. Aby byla zachována rovnováha měrné mechanické energie kapaliny, musí rychlost proudění od bodu M klesat. V oblasti, kde $\partial p / \partial x > 0$, dochází k brzdění částic tekutiny vlivem vnitřního tření a kladným tlakovým gradientem. [5] Z tohoto důvodu rychlost v mezní vrstvě klesá až do chvíle, kdy se částice na povrchu úplně zastaví. Následně pak vzniká na rychlostním profilu

inflexní bod s tím, že částice kapaliny blíže u povrchu se začnou vlivem kladného tlakového gradientu pohybovat proti směru původního proudění. To pokračuje až do chvíle, kdy se proudění zastaví právě v tomto inflexním bodě. Následně se pak částice proudící v „protisměru“ při kontaktu s částicemi proudícími v původním směru odtrhávají od stěny, a tím dojde k odtržení mezní vrstvy a vzniká vír. Odtržení mezní vrstvy od povrchu tělesa závisí na velikosti kladného tlakového gradientu. O místě na povrchu tělesa, kde dochází k odtržení mezní vrstvy, rozhoduje typ proudění, tedy zda je proudění laminární nebo turbulentní. U turbulentního proudění nastává odtržení mezní vrstvy později než u laminárního, a to z důvodu velkých změn hybnosti mezi částicemi u turbulentního proudění. [5]

4.1.3 Karmánova vírová stezka

Proud vzduchu obtékající těleso (v našem případě prutové těleso kruhového průřezu), generuje za obtékaným tělesem řadu vzdušných vírů, které se odtrhávají od jeho povrchu (způsobem popsáným výše) a způsobují jeho rozkmitání, jak ve směru proudění, tak i ve směru kolmém na směr proudění. [2] Tyto víry jsou unášeny proudem vzduchu za tělesem a útvar, který vytvářejí, je znám jako Karmánova vírová stezka, která je názorně vidět na obr. 2.



Obr. 2- Fotografie, na které je zachycena Karmánova vírová stezka. (Převzato z [3])

Nebezpečí Karmánových vírů spočívá v jejich periodickém charakteru. Frekvence budícího silového působení na těleso vlivem odtržení víru od povrchu tělesa se totiž může shodovat s vlastní frekvencí tohoto tělesa, a tak může nastat rezonanční stav, který často vede ke zhroucení tohoto tělesa. [4]

4.1.4 Strouhalovo číslo

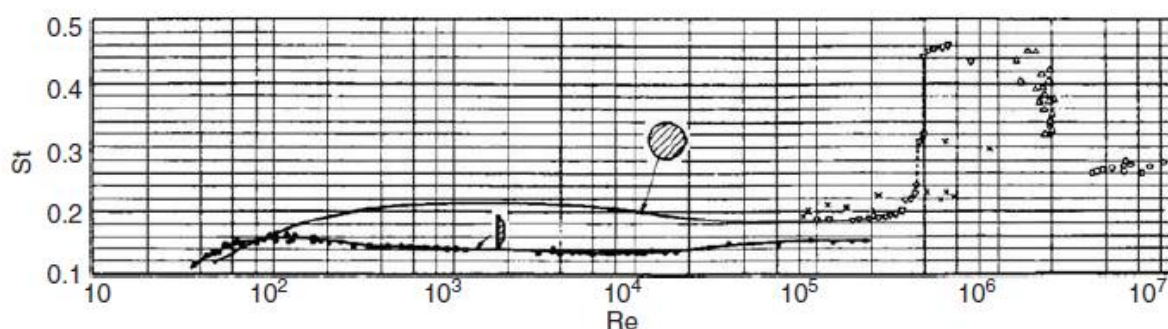
Vzdušné víry se od povrchu tělesa odtrhávají periodicky s určitou frekvencí. Válcové těleso je buzeno ve směru podélném (ve směru proudění) a ve směru příčném (kolmém na směr proudění). Odporové síly, které způsobují rozkmitání tělesa, mají pro symetrické válcové těleso v příčném směru (vztlaková síla) frekvenci odpovídající frekvenci odtrhávání vírů danou Strouhalovým číslem a pro podélný směr (čelní odporová síla) mají frekvenci rovnou dvojnásobku frekvence pro příčný směr. [2] Ke stanovení frekvence odtrhávání vírů nám slouží tzv. Strouhalovo číslo (S_t). Je to bezrozměrné podobnostní číslo, které je charakterizováno vztahem:

$$S_t = \frac{f_s \cdot D}{v} \quad (1.1)$$

Kde f_s [Hz] je hodnota frekvence odtrhávání vírů, D [m] je charakteristický rozměr (v našem případě průměr válce), v [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] je rychlost stacionárního proudění. [2] Strouhalovo číslo úzce souvisí s dalším podobnostním číslem, a to s číslem Reynoldsovým (Re). Reynoldsovo podobnostní číslo charakterizuje druh proudění (laminární pro malé hodnoty Re nebo turbulentní pro velké hodnoty Re) a je dáno vztahem:

$$Re = \frac{\rho \cdot D \cdot v}{\eta} \quad (1.2)$$

Kde ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je hustota kapaliny, D [m] je charakteristický rozměr, v [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] rychlost proudění a η [$\text{Pa} \cdot \text{s}$] je dynamická viskozita kapaliny. Ze vztahů (1.1) a (1.2) vyplývá, že Strouhalovo číslo se dá vyjádřit jako funkce Reynoldsova čísla, a také, že frekvence odtrhávání vírů je závislá na hustotě kapaliny, její dynamické viskozitě, charakteristickém rozměru obtékaného tělesa (průměru válce) a rychlosti stacionárního proudění. [2] Závislost Strouhalova čísla na číslu Reynoldsovu je znázorněna na obr. 3. Z průběhu této závislosti vyplývá, že pro těleso s kruhovým průřezem v oblasti $10^3 < Re < 2 \cdot 10^4$ (což je rozsah Reynoldsových čísel pro problém řešený v této práci) je hodnota Strouhalova čísla konstantní a přibližně rovna 0,21 [-].



Obr. 3- Závislost $St=f(Re)$. (Převzato z [2])

4.1.5 Silové působení způsobené odtrháváním Karmánových vírů

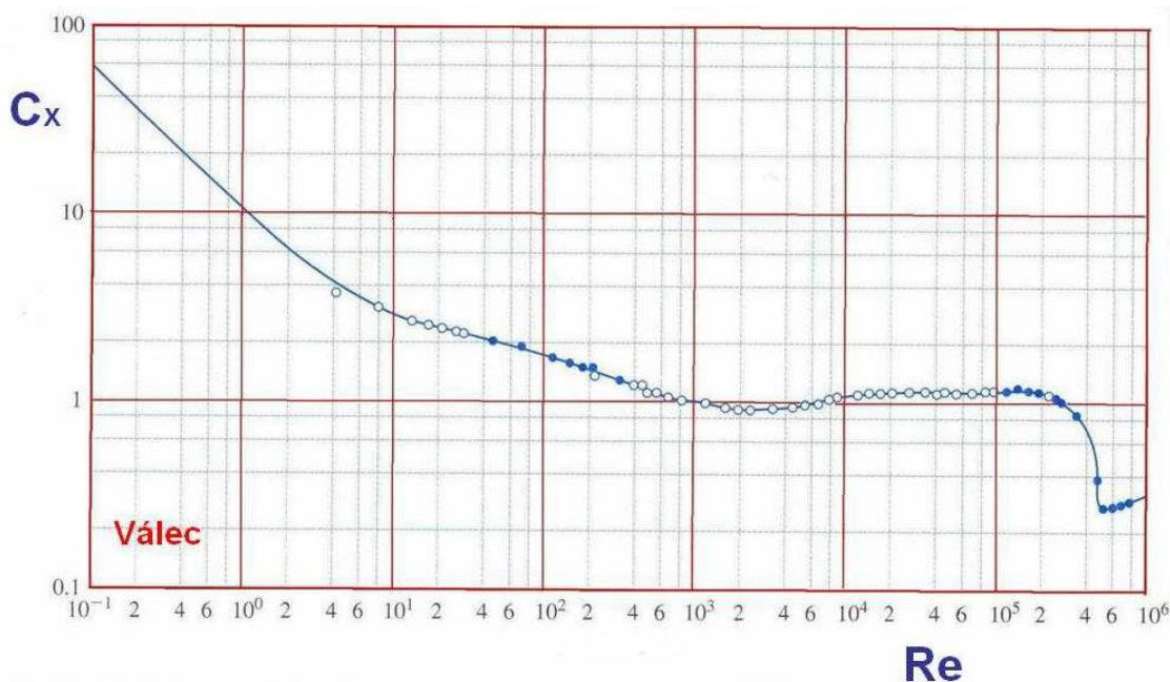
Při obtékání tělesa vzduchem působí na těleso odporové síly. Jelikož odtrhávání vírů má periodický charakter, je i toto silové působení periodické. Ve směru kolmém na směr proudění působí s frekvencí odtrhávání vírů f_s vztahová síla F_{vz} [N], zatímco ve směru proudění působí na těleso odporová síla F [N] s frekvencí rovnou dvojnásobku frekvence odtrhávání vírů $2f_s$. Velikost obou silových působení může být vyjádřena pomocí Newtonových vztahů (1.3) a (1.4) [5]:

$$F = C_x \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v_\infty^2}{2} \quad (1.3)$$

$$F_{vz} = C_y \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v_\infty^2}{2} \quad , \quad (1.4)$$

kde C_x [-] je odporový součinitel v podélném směru, C_y [-] je odporový součinitel v příčném směru, S [m^2] je čelní plocha, na kterou působí proud vzduchu, ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je hustota vzduchu, v_∞ [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] je rychlost proudění vzduchu v dostatečné vzdálenosti před tělesem. Velikost silového působení není konstantní a je závislá na rychlosti proudění vzduchu a rovněž na odporovém součiniteli C . Tento součinitel je totiž závislý na velikosti Reynoldsova

čísla a tvaru tělesa. Vyjadřuje celkový odpor, který klade těleso proudu vzduchu. Tento odpor se skládá ze tří složek: třecího odporu, tvarového odporu a indukovaného odporu. [5] U těles se zakřiveným povrchem je velice těžké určit poměr těchto složek. Proto je třeba hodnotu odporového součinitele změřit nebo stanovit výpočtem. Průběh odporového součinitele v závislosti na Reynoldsově číslu znázorňuje obr. 4.



Obr. 4- Závislost $C_x = f(Re)$ pro válcové těleso stanovená na základě měření v aerodynamickém tunelu. (Převzato z [5])

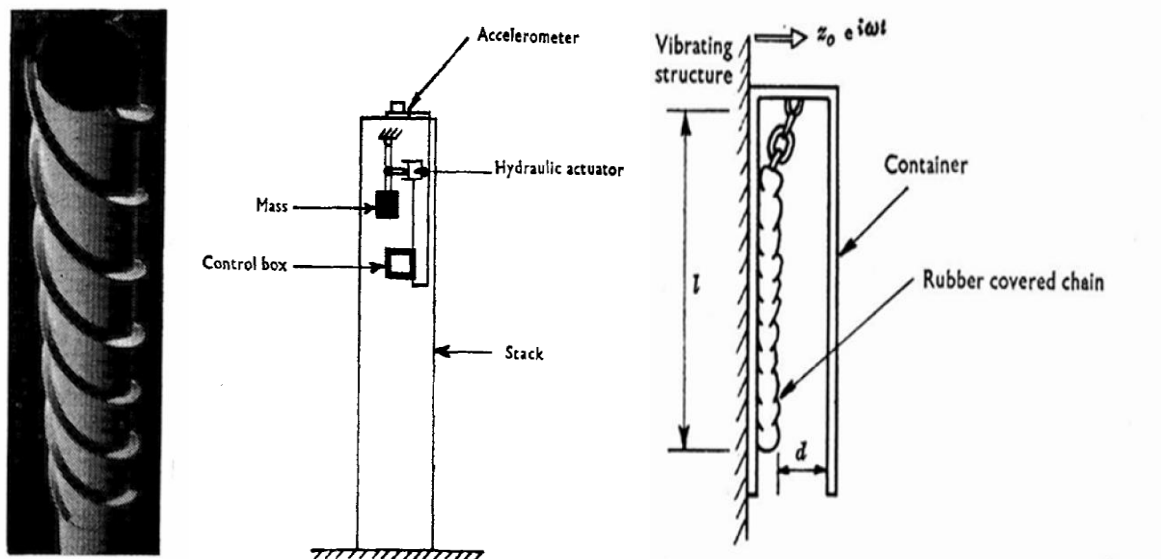
U válcového tělesa byly experimentálně stanoveny závislosti pro tento součinitel na základě hodnoty Reynoldsova čísla. Tyto závislosti ovšem platí pouze v určitém rozsahu Reynoldsových čísel, tudíž neexistuje univerzální vztah, kterým by bylo možné hodnotu tohoto součinitele určit. Odporový součinitel u vztlakové síly nabývá jiných hodnot než u odporové síly. Z tohoto důvodu je velikost silového působení různá v podélném a příčném směru.

4.1.6 Opatření proti působení Karmánových vírů

Vlivu působení odtrhávání Karmánových vírů na těleso se dá předejít následujícími opatřeními:

Aerodynamické prvky

Aerodynamické prvky, které jsou umístěny na obtékané těleso, působí proti pravidelnému odtrhávání Karmánových vírů z povrchu válcového tělesa, a to vlivem přesměrování silového působení větru. [6] Jedním z těchto opatření je instalace vzdušných bariér na povrch válcového tělesa, např. navařením plechů do spirály (obr. 5). Tato opatření se aplikují pouze na tělesa s kruhovým průřezem, neboť u jiných tvarů příčného průřezu tělesa nemají požadovaný efekt. [6] Dalším omezením těchto opatření je různá efektivita využití při určitých rychlostech větru a nutnost testování ve zkušebních tunelech. [7]



Obr. 5- Opatření proti vlivu Karmánových vírů na konstrukci. Zleva: aplikace aerodynamického prvku; aktivní mechanický tlumič; pasivní nárazový tlumič (Převzato z [7])

Aplikace tlumičů

Další variantou protiopatření je aplikace tlumičů kmitání. Aktivní mechanické tlumiče (viz obr. 5) fungují tak, že v danou chvíli mechanické kyvadlo zatěžuje těleso přesně opačným směrem než síla způsobená otrháváním vírů a tím se účinky silového působení navzájem vyruší. Pokud ale tento systém není správně odladený a tlumič bude zatěžovat těleso ve stejném směru, jak působí vnější síla, dojde k tomu, že místo tlumení bude těleso kmitat ještě s vyšší amplitudou výchylky, než kdyby tento tlumič nebyl vůbec použit. [7] Pasivní nárazové tlumiče absorbují kinetickou energii buzeného tělesa tak, že řetěz potažený gumou převezme část kinetické energie od buzeného tělesa, kmitá s fázovým posuvem, a tak tlumí kmitání tělesa jako celku. [7]

Změna modálních vlastností tělesa

Další možností, jak potlačit účinky odtrhávání Karmánových vírů, je aktivní změna modálních vlastností buzeného tělesa. Jedná se o změnu vlastní frekvence buzeného tělesa tak, aby se předešlo vzniku rezonančního stavu. [6] Existují dva způsoby, jak měnit vlastní frekvenci buzeného tělesa. Buď nějakým způsobem měnit tuhost tělesa, což se dá realizovat velice obtížně, nebo aktivní změnou hmotnosti. [6] Změna hmotnosti může být realizována zaplavit komoru tělesa kapalinou, která v daném místě lokálně zvýší hmotnost.

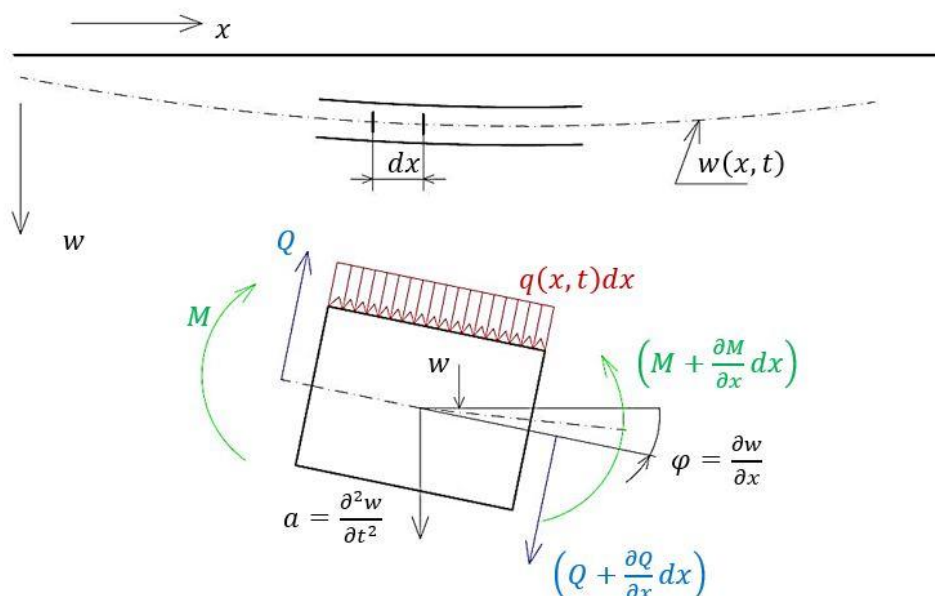
4.2 Analýza ohybového kmitání přímých nosníků

Tato část práce se zabývá teoretickým základem pro analytické řešení příčného kmitání, který je v této práci použit ke zjištění vlastní frekvence prutového tělesa. Následující teorie je popsána na základě technologického průvodce „Mechanické kmitání“ od doc. Ing. Rudolfa Brepty, DrSc; akademika Ladislava Půsta a Ing. Františka Turka, CSc. [8]

4.2.1 Bernoulliho-Eulerova teorie pro ustálené kmitání

U této teorie předpokládáme přímý štíhlý nosník s průřezem měnícím svou velikost. Nosník kmitá v rovině dané osou nosníku jednou z hlavních os setrvačnosti. Řezy vedené kolmo na

střednici tohoto nosníku zůstávají během jeho průhybu rovinné a jsou orientované kolmo vůči průhybové křivce. Předpokládané průhyby kmitajícího nosníku jsou malé ve srovnání s rozměry jeho příčného průřezu. Při kmitání se zanedbávají posuvy ve směru střednice prutu i natočení v rovině průhybu. Uvažuje se pouze příčný pohyb k ose x (obr. 6).



Obr. 6- Uvolněný prvek příčně kmitajícího nosníku, síly a momenty na něj působící.
(Převzato a upraveno z [8])

Odvození pohybové rovnice pro příčně kmitající nosník

Na základě výše uvedeného schématu je odvozený základní tvar pohybové rovnice:

$$A(x)dx\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + q(x,t)dx, \quad (2.1)$$

kde $A(x)$ [m^2] je obecně proměnlivá plocha průřezu, Q [N] je posouvající síla působící na element nosníku, ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je hustota, $w(x,t)$ je průhyb nosníku a $q(x,t)$ je vnější jednotkové zatížení. Rovnici (2.1) je třeba ještě upravit do finálního tvaru, a k tomu budeme potřebovat další vztahy. Jedním z těchto vztahů je momentová rovnice rovnováhy (zanedbává se rotační setrvačnost elementu nosníku, jelikož se neuvažuje natočení v rovině průhybu) [8]:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (2.2)$$

Dále je třeba ještě nějakým způsobem vyjádřit vztah mezi ohybovým momentem (M) a křivostí ohybové křivky:

$$M = -EJ(x) \frac{\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$J(x)$ [m⁴] je obecně proměnný kvadratický moment průřezu k ose jdoucí těžištěm tohoto průřezu kolmo k rovině kmitání a E [Pa] je Youngův modul pružnosti v tahu. Za předpokladu ploché ohybové křivky se dá výše uvedený vztah linearizovat na vztah [8]:

$$M \doteq - EJ(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Z uvedených vztahů (2.1), (2.2) a (2.3) můžeme vyjádřit finální podobu pohybové rovnice následující úpravou:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial M}{\partial x} = -E \frac{\partial}{\partial x} \left[J(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[J(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ A(x) dx \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x} dx + q(x,t) dx \quad / \cdot \frac{1}{dx} \\ A(x) \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t) \\ A(x) \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[J(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + q(x,t) \\ A(x) \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[J(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] &= q(x,t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Rovnice (2.4) je pohybová rovnice pro příčné kmitání nosníku s obecně proměnným průřezem. Pro náš model budeme předpokládat prismatický nosník, u kterého platí, že má po celé délce konstantní průřez, tudíž plocha průřezu (A) i kvadratický moment (J) budou konstantní. Pro nezátížený prismatický nosník ($q=0$) tedy můžeme odvodit pohybovou rovnici následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} A \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} &= 0 \quad / : A \rho \\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EJ}{A \rho} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c^2 j^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.6)$$

$$j = \sqrt{\frac{J}{A}} \quad (2.7)$$

Vztah (2.5) představuje pohybovou rovnici pro kmitavý pohyb nezátíženého prismatického nosníku. V této pohybové rovnici se vyskytují dvě nové veličiny. Jako první c [m · s⁻¹] představuje rychlost šíření podélných vln v tenké tyči která je vztahem (2.6). Další j [m] představuje kvadratický poloměr průřezu nosníku, který je vyjádřen vztahem (2.7).

Odvození rovnice pro tvar kmitu

K odvození využijeme předpokládané řešení pohybové rovnice ustáleného kmitání, které je ve tvaru [8]:

$$w(x, t) = w_0(x)e^{i\Omega t} \quad (2.8)$$

Předpokládané řešení (2.8) upravíme a dosadíme do pohybové rovnice (2.5), ze které získáme rovnici pro tvar kmitu následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} &= -\Omega^2 w_0(x)e^{i\Omega t} \\ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} &= \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} e^{i\Omega t} \\ -\Omega^2 w_0(x)e^{i\Omega t} + c^2 j^2 \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} e^{i\Omega t} &= 0 \quad /: e^{i\Omega t} \\ \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} &= \frac{\Omega^2}{c^2 j^2} w_0(x) \\ \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} &= \beta^4 w_0(x) \quad (2.9) \\ \beta^4 &= \frac{\Omega^2}{c^2 j^2} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Diferenciální rovnice (2.9) je rovnicí pro tvar kmitu. Pro její řešení se potom zavádí substituce (2.10).

Řešení rovnice pro tvar kmitu a výpočet vlastních frekvencí nosníku

Řešení rovnice pro tvar kmitu (2.9) se dá vyjádřit klasickým řešením obecné diferenciální rovnice 4. řádu (postup řešení uvádí např. Jaromír Slavík v publikaci Počítačové metody mechaniky [9]). Pro vyjádření řešení rovnice (2.9) je výhodné použít, pro zjednodušení dalšího postupu, Reyleighovy (někdy známé také jako Krylovy) funkce [8]:

$$\begin{aligned} S(\beta x) &= \frac{1}{2}(\cosh \beta x + \cos \beta x) \\ T(\beta x) &= \frac{1}{2}(\sinh \beta x + \sin \beta x) \\ U(\beta x) &= \frac{1}{2}(\cosh \beta x - \cos \beta x) \\ V(\beta x) &= \frac{1}{2}(\sinh \beta x - \sin \beta x) \quad (2.11) \end{aligned}$$

Tyto funkce mají dvě specifické vlastnosti, kterých lze elegantně využívat při zjišťování vlastních frekvencí nosníku. První vlastností těchto funkcí je, že pro nulovou hodnotu argumentu je hodnota jedné funkce rovna 1 a zbývající tři nabývají hodnotu 0. [9] Další vlastností Reyleighových funkcí je, že svou derivací přecházejí jedna v druhou v pořadí, v jakém jsou zapsány v (2.11), a vynásobenou mocninou konstanty β (Derivace fungují například

tímto způsobem: $T'(\beta x) = \beta S(\beta x)$; $T''(\beta x) = \beta^2 V(\beta x)$). Řešení (2.9) se dá pomocí těchto funkcí vyjádřit následujícím způsobem [8]:

$$w_0(x) = C_1 S(\beta x) + C_2 T(\beta x) + C_3 U(\beta x) + C_4(\beta x) \quad (2.12)$$

Integrační konstanty obsažené v řešení této rovnice získáme splněním okrajových podmínek, které se liší případ od případu. Řešením frekvenční rovnice získáme hodnoty kořenů βx pro jednotlivé tvary kmitu, které jsou nezbytné k určení velikosti vlastní frekvence nosníku. Po zjištění těchto kořenů můžeme jednoduše spočítat hodnotu vlastní frekvence, zde uvedenou pro n-tý tvar podle vztahu [8]:

$$\Omega_n = \frac{(\beta_n l)^2}{l^2} c j, \quad (2.13)$$

kde Ω_n [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$] je vlastní úhlová frekvence nosníku n-tého tvaru kmitavého pohybu, β_n je kořen frekvenční rovnice pro n-tý tvar, l [m] je délka nosníku, c [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] rychlost šíření podélných vln v tenké tyči a j [m] kvadratický poloměr průřezu nosníku. V praktické části bude názorně odvozena pomocí výše uvedeného postupu frekvenční rovnice a budou analyticky spočteny vlastní frekvence konkrétního nosníku, které budou sloužit jako referenční pro kontrolu modelu v MKP.

4.2.2 Reyleighova a Timošenkova teorie pro ustálené kmitání

Jak je uvedeno v části 4.2.1., je Bernoulliho-Eulerova teorie pro ustálené kmitání nosníků omezena při kmitavém pohybu pouze na příčný pohyb elementů nosníku (viz. obr. 6). V této teorii je zanedbán vliv rotační setrvačnosti elementů i vliv posouvající síly. Reyleighova teorie pro ustálené kmitání nosníků uvažuje kromě příčného pohybu také natočení elementů, tudíž zahrnuje i vliv rotační setrvačnosti jednotlivých prvků nosníku. Natočení prvku lze vyjádřit pro plochou ohybovou křivku následujícím vztahem [8]:

$$\varphi(x, t) \doteq tg(\varphi) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$$

Úhlové zrychlení elementu α [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$] vyjádřené pomocí natočení prvku je vyjádřeno vztahem:

$$\alpha = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \quad (2.14)$$

Rovnice momentové rovnováhy (2.2), použitá pro odvození pohybové rovnice v Bernoulliho-Eulerově teorii, přechází díky zahrnutí rotační setrvačnosti elementů do tvaru následující pohybové rovnice [8]:

$$\rho J \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x} = Q - \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.15)$$

Za pomoci vztahů (2.1), (2.15) a (2.3) pro $q=0$ s podobnými úpravami, jakých jsme využili v předcházející podkapitole, můžeme vyjádřit tvar pohybové rovnice pro prismatický nezátížený nosník podle Reyleighovy teorie [8]:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c^2 j^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - j^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (2.16)$$

Přesnější vyjádření pohybové rovnice ustáleného kmitavého pohybu nosníku nabízí Timošenkova teorie ustáleného kmitání, která ji navíc ještě zpřesňuje o vliv posouvající síly.

Základní myšlenka této teorie je založena na předpokladu, že tečny ohybové křivky nosníku můžeme vyjádřit součtem úhlu pootočení elementu ψ (vyvolaný ohybem) a úhlu δ , což je zkos vyvolaný posouvající silou, tedy [8]:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = \psi + \delta$$

Pro ohyb pak platí:

$$M = -EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Posouvající síla Q způsobí zkos elementu δ :

$$Q = \gamma AG \delta$$

Kde $\gamma [rad^{-1}]$ v tomto vztahu vyjadřuje součinitel, který je závislý na tvaru průřezu, $G [Pa]$ je Youngův modul pružnosti ve smyku. Můžeme vyjádřit [8]:

$$Q = \gamma AG \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi \right)$$

Pro natočení prvku je zavedena rovnice:

$$\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = Q - \frac{\partial M}{\partial x}$$

Pro příčný pohyb prvku platí rovnice:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Z výše uvedených dílčích vztahů lze odvodit výslednou pohybovou rovnici opět vyjádřenou pro prismatický nosník v nezátíženém stavu [8]:

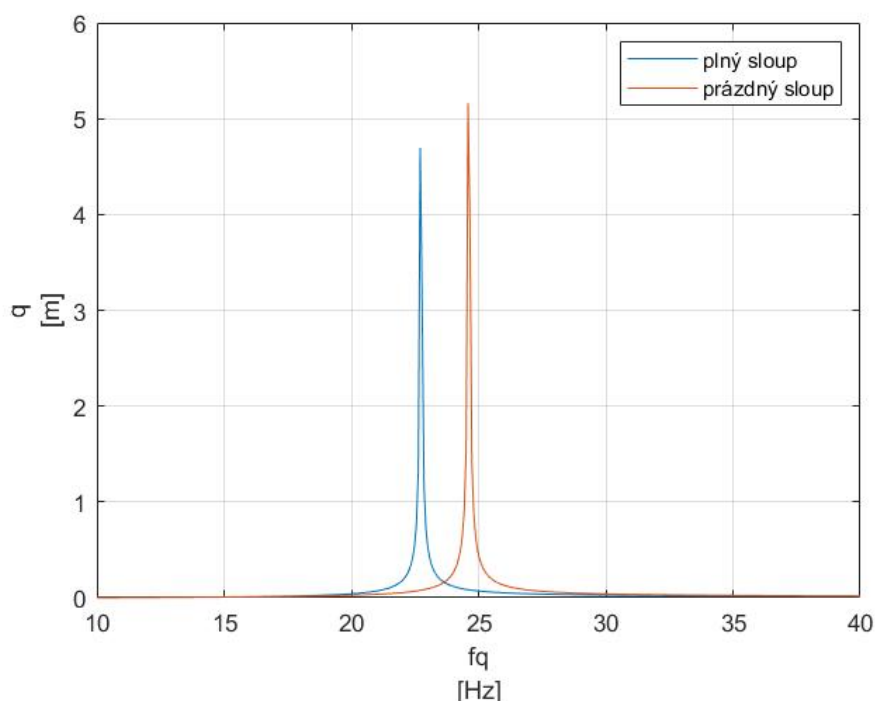
$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c^2 j^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - j^2 \left[1 + \frac{2(1 + \mu)}{\gamma} \right] \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{j^2}{c_p^2} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} = 0 \quad (2.17)$$

Kde $\mu [-]$ je Poissonovo číslo, $c_p = \sqrt{G/\rho}$ je rychlost šíření příčných vln v kontinuu [8]. Když porovnáme tvar pohybové rovnice (2.5), (2.16) a (2.17) je jasné, že čím přesnější vztah, tím je složitější odvození řešení frekvenční rovnice a vlastních frekvencí nosníku. Proto je důležité si uvědomit a rozhodnout se, zda je nutné počítat nejpřesnějším způsobem, popřípadě jestli vlastní frekvence určené jednodušší Bernoulliho-Eulerovou teorií vykazují přijatelnou chybu. Hodnoty vlastních frekvencí určené pomocí Bernoulliho-Eulerovy teorie vykazují poměrně přijatelnou chybu, která je menší než 5 % v porovnání s přesnějšími výsledky získané Reyleighovou nebo Timošenskou teorií, pokud pro kořen získaný z frekvenční rovnice platí následující podmínka [8]:

$$\beta_n l < 0,15 \frac{l}{j}$$

5 MODELOVÉ TĚLESO

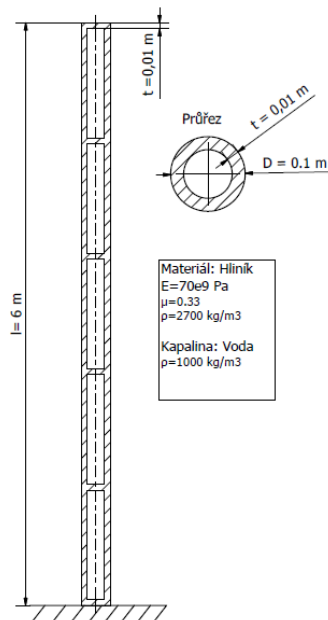
Náplní této práce je optimalizace modálních vlastností prutového tělesa obtékaného vzduchem tak, aby odtrhávání vzdušných vírů mělo co nejmenší dopad na jeho konstrukci. Obtékaným modelovým prutovým tělesem bude jednostranně vetknutý sloup. V tomto sloupu je určitý počet komor, jejichž zaplavením budeme realizovat změnu hmotnosti v jeho částech, a tak budeme moci aktivně měnit jeho vlastní frekvenci. Tím, že budeme tyto vlastnosti měnit, budeme mít pod kontrolou odezvu sloupu na danou budící frekvenci. Naším hlavním cílem je určit pro danou budící frekvenci co nejvýhodnější konfiguraci zaplavení komor tak, aby „přejezd“ přes vlastní frekvenci měl minimální dopad na konstrukci sloupu. Příkladem mohou být amplitudo-frekvenční charakteristiky na obr. 7, kde je vidět, že pro prázdný sloup a plně zaplněný sloup jsou maximální hodnoty amplitudy výchylky na dvou různých frekvencích. Jakmile se prázdný sloup bude blížit vlastní frekvenci, změnou hmotnosti na určité budící frekvenci dosáhneme jeho přeladění, a tím snížení výchylky v oblasti rezonance.



Obr. 7- Amplitudo-frekvenční charakteristika prázdného a zaplněného sloupu

5.1 Tvar a rozměry modelového tělesa

Ve výpočtech bude analyzován sloup kruhového průřezu, který v našem případě obsahuje 5 komor. Velký průměr sloupu (D) je 0,1 m, tloušťka stěn (t) je 0,01 m a výška sloupu (l) je 6 m. Sloup je vyroben z hliníku (hliníková slitina A413.0) a použitou kapalinou na zaplavování komor je voda (viz obr. 8).



Obr. 8- Schéma analyzovaného sloupu včetně materiálových charakteristik [10]

6 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ VLASTNÍCH FREKVENCÍ PRUTOVÉHO TĚLESA

Analyzovaný sloup z obr. 8 byl uvažován jako jednostranně vetknutý, nezatižený, prismatický svislý nosník, u kterého nebylo uvažováno zaplavení komor ani přepážky mezi nimi. K určení vlastních frekvencí byla použita Bernoulliho-Eulerovy teorie viz. kapitola 4.2.1. Řešení pro analyzovaný nosník vycházelo z rovnice pro tvar kmitu (2.9), jejíž řešení dané vztahem (2.12), které bylo vyjádřeno pomocí Krylových funkcí (2.11), a muselo splňovat následující okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} w_{(y=0)} &= 0 \\ \frac{dw_{(y=0)}}{dy} &= 0 \\ M_{(y)} &= -EJ \frac{d^2 w_{(y)}}{dy^2} = 0 \\ Q_{(y)} &= -EJ \frac{d^3 w_{(y)}}{dy^3} = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Okrajové podmínky (6.1) při řešení (2.12) modifikovaly následující soustavu rovnic:

$$w_{(y=0)} = C_1 S(\beta \cdot 0) + C_2 T(\beta \cdot 0) + C_3 U(\beta \cdot 0) + C_4 V(\beta \cdot 0) = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{dw_{(y=0)}}{dy} = \beta \cdot (C_1 V(\beta \cdot 0) + C_2 S(\beta \cdot 0) + C_3 T(\beta \cdot 0) + C_4 U(\beta \cdot 0)) = 0 \quad (6.3)$$

$$-EJ \frac{d^2 w_{(y)}}{dy^2} = -EJ \beta^2 (C_1 U(\beta y) + C_2 V(\beta y) + C_3 S(\beta y) + C_4 T(\beta y)) = 0 \quad (6.4)$$

$$-EJ \frac{d^3 w_{(y)}}{dy^3} = -EJ \beta^3 (C_1 T(\beta y) + C_2 U(\beta y) + C_3 V(\beta y) + C_4 S(\beta y)) = 0 \quad (6.5)$$

Z rovnice (6.2) byla získána hodnota konstanty C_1 ($C_1 = 0$) a po dosazení této konstanty do rovnice (6.3) byla určena hodnota konstanty C_2 ($C_2 = 0$). Po dosazení výše uvedených konstant do zbylých dvou rovnic (6.4) a (6.5) byly tyto rovnice upraveny na následující soustavu rovnic:

$$C_3 S(\beta y) + C_4 T(\beta y) = 0 \quad (6.6)$$

$$C_3 S(\beta y) + C_4 T(\beta y) = 0 \quad (6.7)$$

Pro získání netriviálního řešení soustavy rovnic (6.6) a (6.7) musí být determinant této soustavy roven nule. Pokud tedy položíme daný determinant tak, aby byl roven nule, dostaneme frekvenční rovnici pro naše uložení nosníku následujícími úpravami:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} S(\beta y) & T(\beta y) \\ V(\beta y) & S(\beta y) \end{vmatrix} &= S^2(\beta y) - V(\beta y) \cdot T(\beta y) = 0 \\ \left(\frac{1}{2} \cosh(\beta y) + \frac{1}{2} \cos(\beta y) \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \sinh(\beta y) - \frac{1}{2} \sin(\beta y) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \sinh(\beta y) + \frac{1}{2} \sin(\beta y) \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \cosh^2(\beta y) + \frac{1}{2} \cosh(\beta y) \cdot \cos(\beta y) + \frac{1}{4} \cos^2(\beta y) - \left(\frac{1}{4} \sinh^2(\beta y) + \frac{1}{4} \sinh(\beta y) \cdot \sin(\beta y) - \frac{1}{4} \sinh(\beta y) \cdot \sin(\beta y) - \frac{1}{4} \sin^2(\beta y) \right) = 0$$

$$\frac{1}{4} \cosh^2(\beta y) + \frac{1}{2} \cosh(\beta y) \cdot \cos(\beta y) + \frac{1}{4} \cos^2(\beta y) - \frac{1}{4} \sinh^2(\beta y) + \frac{1}{4} \sin^2(\beta y) = 0 \quad / \cdot 4$$

$$\cosh^2(\beta y) + 2 \cosh(\beta y) \cdot \cos(\beta y) + \cos^2(\beta y) - \sinh^2(\beta y) + \sin^2(\beta y) = 0$$

$$\cosh^2(\beta y) - \sinh^2(\beta y) + 2 \cosh(\beta y) \cdot \cos(\beta y) + 1 = 0$$

$$2 + 2 \cosh(\beta y) \cdot \cos(\beta y) = 0 \quad / : 2$$

$$1 + \cosh(\beta y) \cdot \cos(\beta y) = 0 \quad (6.8)$$

Rovnice (6.8) je hledaná frekvenční rovnice, ze které je nutné získat kořeny βy pro určení vlastní frekvence. Jedná se o nelineární rovnici, tudíž kořeny získáme pouze numerickým řešením. Získané první tři kořeny:

$$\beta y_1 = 1,8751; \beta y_2 = 4,6941; \beta y_3 = 7,8548$$

K finálnímu určení vlastních frekvencí byl využit vztah (2.13). Před jeho použitím bylo potřeba ještě určit hodnotu rychlosti šíření podélných vln v tenké tyči c pomocí vztahu (2.6), kvadratický poloměr průřezu nosníku j podle vztahu (2.7), kvadratický moment průřezu nosníku J a plochu průřezu nosníku A .

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{70 \cdot 10^9}{2700}} = 5091,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$J = \frac{\pi \cdot (D^4 - (D - 2 \cdot t)^4)}{64} = \frac{\pi \cdot (0,1^4 - (0,1 - 2 \cdot 0,01)^4)}{64} = 2,8981 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = \frac{\pi \cdot (D^2 - (D - 2 \cdot t)^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (0,1^2 - (0,1 - 2 \cdot 0,01)^2)}{4} = 2,8274 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$j = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{2,8981 \cdot 10^{-6}}{2,8274 \cdot 10^{-3}}} = 0,03202 \text{ m}$$

Hodnoty vlastních frekvencí pro první tři tvary prismatického, jednostranně vetknutého a nezatíženého sloupu jsou tyto:

$$\Omega_1 = \frac{(\beta y_1)^2}{l^2} \cdot c \cdot j = \frac{(1,8751)^2}{6^2} \cdot 5091.75 \cdot 0,03202 = 15,9234 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\rightarrow f_{v1} = \mathbf{2,53 \text{ Hz}}$$

$$\Omega_2 = \frac{(\beta y_2)^2}{l^2} \cdot c \cdot j = \frac{(4,6941)^2}{6^2} \cdot 5091.75 \cdot 0,03202 = 99,7908 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\rightarrow f_{v2} = \mathbf{15,88 \text{ Hz}}$$

$$\Omega_3 = \frac{(\beta y_3)^2}{l^2} \cdot c \cdot j = \frac{(7,8548)^2}{6^2} \cdot 5091.75 \cdot 0,03202 = 279,4191 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\rightarrow f_{v3} = \mathbf{44,47 \text{ Hz}}$$

Získané vlastní frekvence pro první tři tvary byly dále použity jako referenční a pomocí nich byla ověřena správnost výpočtového modelu při řešení pomocí metody konečných prvků.

7 VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ

Tato část práce se zabývá výpočtovým modelováním prutového tělesa s cílem určit jeho vlastní frekvence pomocí metody konečných prvků (MKP) a následně určit amplitudo-frekvenční odezvu harmonickou analýzou pro všechny možné kombinace zaplavení komor.

7.1 Model geometrie

Válcový sloup, jehož modální vlastnosti mají být optimalizovány přidáním hmotností, byl ve výpočtovém modelu vytvořen pomocí lineárního prvku BEAM188. Tento prvek nese informaci o vnitřním průřezu analyzovaného sloupu dle rozměrů znázorněných na obr. 8. Zaplněná nebo prázdná komora byla reprezentována prvkem MASS21, který byl umístěn do místa, ve kterém se nachází těžiště komory. Prvek MASS21 nese informaci o hmotnosti kapaliny a jejích momentech setrvačnosti pro případ, kdy je komora plně zaplavená nebo úplně prázdná. V analýze byly zanedbány hydrodynamické účinky kapaliny během zaplavování komor. Dále bylo předpokládáno, že zaplavení komor proběhne velmi rychle.

Uvedené typy prvků zmenšily náročnost obou analýz jak z hlediska výpočetního času, tak z hlediska nároků na hardware. Z tohoto důvodu nebyl použit prvek SOLID, protože náhrada pomocí prvků BEAM a MASS byla dostačující a časově výhodnější.

7.2 Model materiálových vlastností

Sloup je vyroben z hliníkové slitiny A413.0. [10] V práci byly použity materiálové vlastnosti této slitiny za předpokladu jejího lineárního chování. Kapalina sloužící k zaplavování komor musí mít dostatečně vysokou hustotu, protože je třeba dosáhnout znatelné změny hmotnosti po plném zaplavení komory, a tak zajistit významný rozdíl ve vlastních frekvencích plně zaplaveného a prázdného sloupu. V této práci bylo uvažováno zaplavování vodou. Vlastnosti použitých materiálů jsou uvedeny v tab. 1.

Tab. 1- Materiálové vlastnosti

Materiál	Youngův modul pružnosti E [Pa]	Poissonův poměr μ [-]	Hustota ρ [kg/m^3]
A413.0	$70 \cdot 10^9$	0,33	2700
Voda	-	-	1000

7.3 Model okrajových podmínek

Stejně jako v analytickém řešení, byla v analýze zahrnuta pouze jedna okrajová podmínka, a to vetknutí v počátku souřadnicového systému. Model této okrajové podmínky byl vytvořen tak, že v uzlu, nacházejícím se v počátku souřadnicového systému, byly zamezeny posuvy ve všech osách ($U_X = U_Y = U_Z = 0$) a také rotace kolem všech os ($ROT_X = ROT_Y = ROT_Z = 0$).

7.4 Modální analýza

Cílem této analýzy bylo zjistit vlastní frekvence a tvary kmitu, které bychom mohli očekávat v daném rozsahu budících frekvencí (frekvence odtrhávání vírů). Zajímaly nás vlastní frekvence dvou extrémů, tedy sloupu se všemi zaplavenými komorami a sloupu s nezaplavenými komorami. Výsledky vlastních frekvencí pro první tři tvary kmitu u prázdného sloupu byly následně porovnány s výsledky analytického řešení. Tím jsme si ověřili správnost výpočtového modelu v MKP.

7.4.1 Frekvenční rozsah

Frekvenční rozsah, uvažovaný v analýzách, odpovídá frekvencím silového působení způsobeného odtrháváním vzdušných vírů. Frekvenci silového působení bylo třeba odhadnout pomocí Strouhalova čísla (viz kap. 4.1.4)

V provedených analýzách byla uvažována maximální rychlost proudění vzduchu $35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Je to hodnota extrémní rychlosti nárazového větru v okolí Brna v deseti metrech nad povrchem s dobou opakování padesáti let, která byla zjištěna na základě dat Ústavu fyziky atmosféry AV ČR. [11]

Bylo předpokládáno proudění v oblasti středních a vyšších Reynoldsových čísel, kdy pro kruhový průřez má Strouhalovo číslo přibližně konstantní hodnotu (viz obr. 2). Za tohoto předpokladu byla uvažována hodnota Strouhalova čísla pro náš případ $St=0,215$. Odhad hraniční budící frekvence pro maximální rychlost proudění 35 m/s ve směru kolmém na směr proudění:

$$f_{smax} = \frac{St \cdot v}{D} = \frac{0,215 \cdot 35}{0,1} = 75,25 \text{ Hz}$$

Pro silové působení ve směru proudění byl uvažovaný frekvenční rozsah dvojnásobný, tedy 0-150 Hz.

7.5 Harmonická analýza

Pro stanovení amplitudo-frekvenční charakteristiky analyzovaného prutového tělesa byla použita harmonická analýza, a to pro všechny kombinace zaplavení komor v celém rozsahu budících frekvencí. Hodnotí se dopad odtrhávání Karmánových vírů na analyzované těleso pomocí vztahu pro bezpečnost vzhledem k meznímu stavu únavové pevnosti (7.5) dle Goodmanova kritéria [12], kde σ_a [Pa] je amplituda napětí, σ'_c [Pa] je modifikovaná mez únavové pevnosti, σ_m [Pa] je hodnota středního napětí a R_m [Pa] je mez pevnosti daného materiálu. Z tohoto vztahu vychází předpoklad, že čím je větší amplituda napětí, tím je nižší bezpečnost k meznímu stavu únavové pevnosti. Pokud jej tedy vezmeme do úvahy, dojdeme k závěru, že nejnižší dopad na konstrukci bude mít konfigurace s nejmenší amplitudou výchylky, protože velikost amplitudy výchylky přímo souvisí s velikostí amplitudy napětí.

$$k_u = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma'_c} + \frac{\sigma_m}{R_m}} \quad (7.5)$$

7.5.1 Model zatížení

Silové působení Karmánových vírů bylo modelováno jako liniové zatížení působící po celé délce sloupu. Velikost amplitudy tohoto zatížení ve směru kolmém na směr proudění se liší od velikosti amplitudy zatížení ve směru proudění. Velikost zatížení roste v závislosti na rychlosti proudění, tedy není konstantní (viz. kap. 4.1.5). Ve výpočtovém modelu bylo vždy předpokládáno jednotkové silové působení, a to pouze v jednom směru. Rozsah budících frekvencí tohoto silového působení byl stejný jako u modální analýzy, tedy 0-150 Hz. Dále pak bylo uvažováno velmi malé konstrukční tlumení o velikosti $10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, které je způsobeno okolním vzduchem.

Zatížení, které ve skutečnosti působí na sloup, bylo přepočteno až posléze v rámci zpracování výsledků harmonické analýzy, kde byly výsledné amplitudy výchylek násobeny reálnou hodnotou amplitudy silového působení pro danou frekvenci.

7.5.2 Kombinace zaplavených komor

K optimalizaci je nutné znát amplitudo-frekvenční charakteristiky sloupu pro každou konfiguraci zaplavení komor. Vzhledem k tomu, že v našem případě jsme uvažovali sloup s pěti komorami, celkový počet kombinací byl 2^5 , tedy 32. Abychom mohli v rámci optimalizace tyto kombinace identifikovat, museli jsme sestavit tabulku těchto kombinací, kdy každá z nich měla své číselné označení. Toto rozdělení reprezentuje tab. 2, kde číslo 1 znamená zaplavenou komoru (modře zvýrazněno) a číslo 0 prázdnou komoru. Číslování komor je 1-5 od nejdříve položené komory.

7.5.3 Realizace výpočtového modelování

Amplitudo-frekvenční charakteristika, s ohledem na silové působení o daném rozsahu budících frekvencí, byla počítána s rozlišením 0,15 Hz. Díky tomu bylo dosaženo poměrně hladkých průběhů amplitudo-frekvenčních charakteristik.

Tab. 2- Kombinace zaplavených komor

ČÍSLO KOMBINACE	KOMORA 1	KOMORA 2	KOMORA 3	KOMORA 4	KOMORA 5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	0
3	1	1	1	0	1
4	1	1	1	0	0
5	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1
8	1	1	0	0	0
9	1	0	1	1	1
10	1	0	1	1	0
11	1	0	1	0	1
12	1	0	1	0	0
13	1	0	0	1	1
14	1	0	0	1	0
15	1	0	0	0	1
16	1	0	0	0	0
17	0	1	1	1	1
18	0	1	1	1	0
19	0	1	1	0	1
20	0	1	1	0	0
21	0	1	0	1	1
22	0	1	0	1	0
23	0	1	0	0	1
24	0	1	0	0	0
25	0	0	1	1	1
26	0	0	1	1	0
27	0	0	1	0	1
28	0	0	1	0	0
29	0	0	0	1	1
30	0	0	0	1	0
31	0	0	0	0	1
32	0	0	0	0	0

8 VÝSLEDKY VÝPOČTOVÉHO MODELOVÁNÍ

8.1 Výsledky modální analýzy

Z výsledků modální analýzy byly získány hodnoty vlastních frekvencí a tvary kmitu v daném rozsahu. Souhrn výsledků je vypsán do tab. 3:

Tab. 3- Hodnoty vlastních frekvencí určené modální analýzou pomocí MKP

Tvar	Vlastní fr. [Hz]-Plně zaplavený sloup	Vlastní fr. [Hz]-Prázdný sloup
1.	1,94	2,48
2.	11,46	15,50
3.	29,26	43,21
4.	66,91	84,09
5.	118,99	137,28
6.	126,99	není v daném rozsahu
7.	130,18	není v daném rozsahu
8.	130,94	není v daném rozsahu

Z výše uvedených výsledků vyplývá, že v daném rozsahu budících frekvencí je u plného sloupu 8 vlastních tvarů kmitavého pohybu a můžeme u této konfigurace očekávat 8 rezonančních stavů. U prázdného sloupu je těchto tvarů pouze 5. Hodnoty vlastních frekvencí sloupu při jiné kombinaci zaplavení komor by se měly nacházet mezi hodnotami vlastních frekvencí prázdného a plně zaplaveného sloupu.

Výsledky vlastních frekvencí prázdného sloupu prvních tří tvarů určené pomocí analytického řešení a tytéž výsledky určené pomocí MKP jsou uvedeny v tab. 4.

Tab. 4- Porovnání výsledků analytického řešení a MKP u prázdného sloupu

Tvar	f [Hz]-MKP	f [Hz]-Analytické řešení
1.	2,48	2,53
2.	15,5	15,88
3.	43,21	44,46

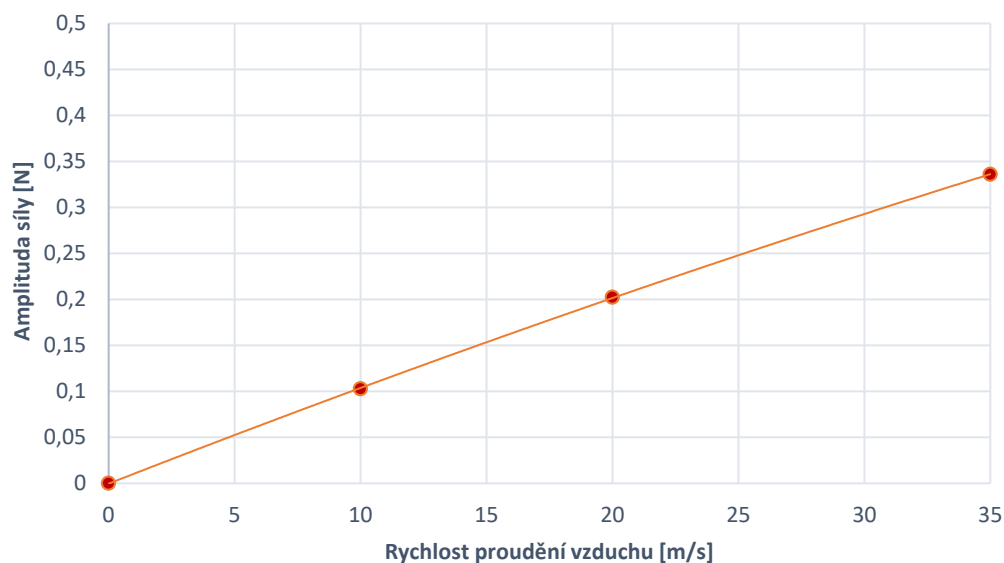
Z výsledků vlastních frekvencí je patrné, že se liší pouze minimálně. Je třeba zdůraznit, že u analytického řešení nebyly brány do úvahy přepážky mezi komorami, což může být možnou příčinou rozdílných výsledků.

8.2 Výsledky harmonické analýzy

Z výsledků harmonické analýzy byly vytvořeny amplitudo-frekvenční charakteristiky na základě maximální amplitudy výchylky prutového tělesa. Maximální výchylky je na prutovém tělese dosaženo u každého tvaru kmitu v jiném místě.

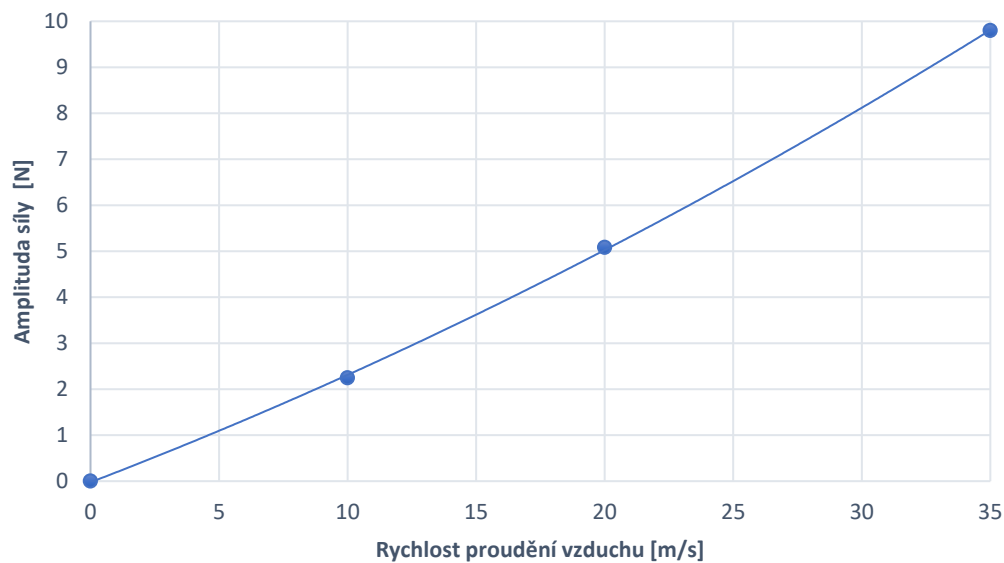
Amplitudo-frekvenční charakteristiky, které byly získány harmonickou analýzou, byly vztaženy pouze k jednotkovému liniovému zatížení prutového tělesa. Všechny tyto hodnoty amplitud výchylky musely být posléze vynásobeny skutečnou amplitudou silového působení v jednotlivých osách při dané rychlosti proudění. Velikost amplitudy zatížení byla pro oba směry spočtena na základě rovnic trendů obdrženy z výsledků analýz proudění, které byly poskytnuty vedoucím práce (obr. 9 a 10).

Amplituda síly v podélném směru



Obr. 9- Závislost velikosti amplitudy silového působení na rychlosti proudění vzduchu v podélném směru

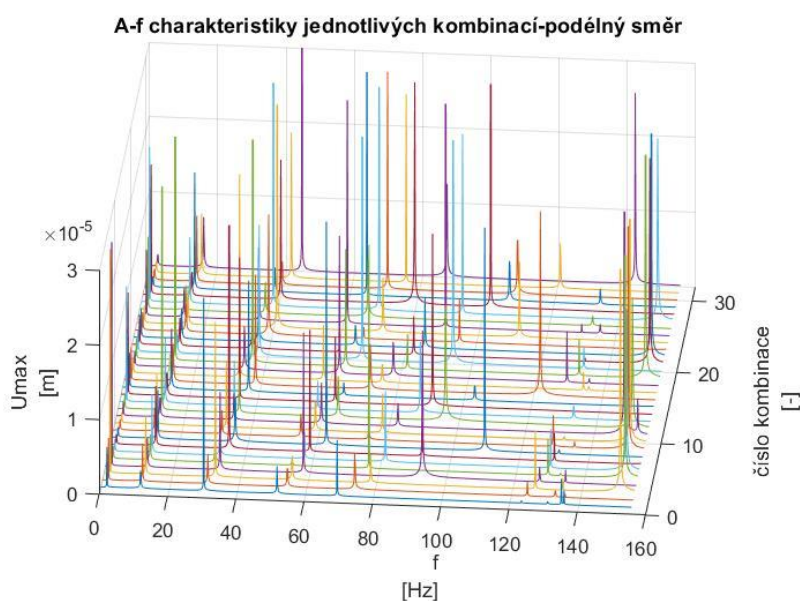
Amplituda síly v příčném směru



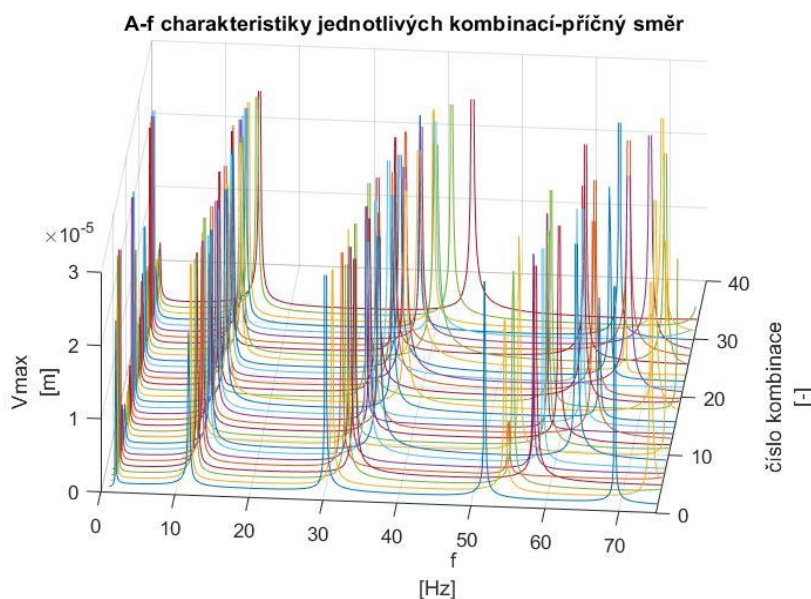
Obr. 10- Závislost velikosti amplitudy silového působení na rychlosti proudění vzduchu v příčném směru

Amplitudy určené z trendů odpovídají silovému působení na jeden metr výšky prutového tělesa (sloupu).

A-f spektra (obr. 11 a obr. 12) znázorňují amplitudo-frekvenční charakteristiky v závislosti na příslušné kombinaci zaplavení a dané budící frekvenci. V oblasti výchylek ve směru proudění byl rozsah budících frekvencí 0-150 Hz, ve směru kolmém na směr proudění byl 0-75 Hz. Z A-f spekter je zřejmé, že za stejné rychlosti proudění sloup v podélném směru kmitá s dvojnásobnou frekvencí než ve směru příčném, a že v příčném směru je amplituda výchylky mnohem vyšší než u směru podélného. Dále je důležité si povšimnout jasných přechodů mezi rezonančními stavy u jednotlivých kombinací. Je patrné, že s rostoucí budící frekvencí máme mnohem více možností, jakou kombinaci zvolit, aby došlo k „potlačení“ rezonančního stavu. Kombinace zaplavení, které jsou pro danou situaci optimální, byly určeny na základě optimalizace.



Obr. 11- Amplitudo-frekvenční spektrum pro kmitavý pohyb v podélném směru



Obr. 12- Amplitudo-frekvenční spektrum pro kmitavý pohyb v příčném směru

9 OPTIMALIZACE MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ

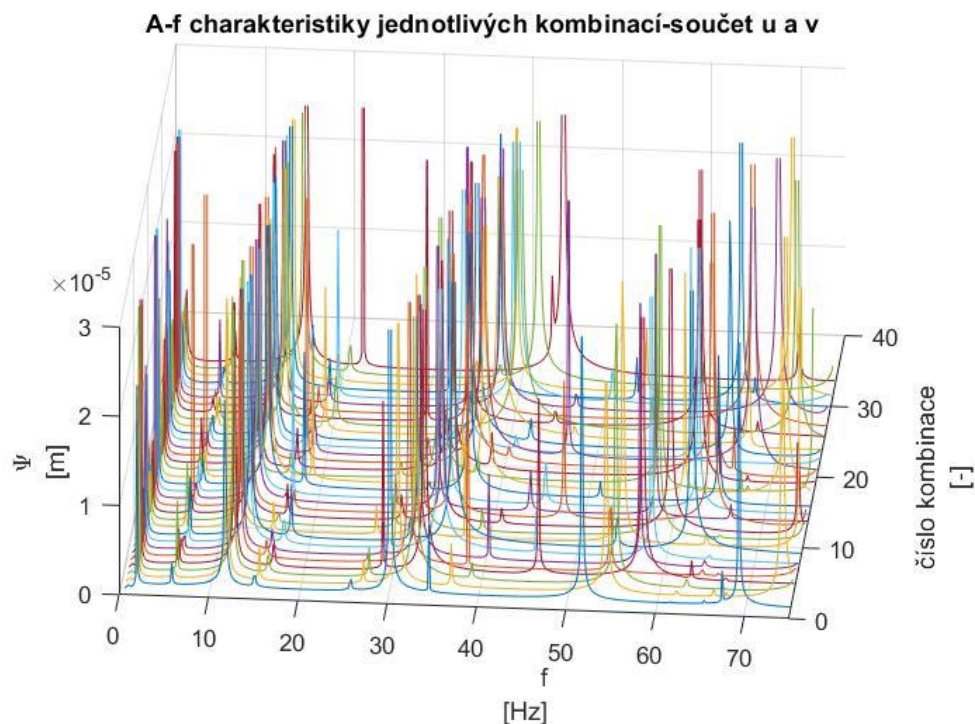
V této části byly na základě výsledků harmonické analýzy hledány optimální kombinace zaplavení komor pro danou rychlost proudění.

9.1 Optimalizační funkce

V rámci optimalizace byl kladen důraz na to, aby v daný okamžik byla zajištěna minimální výchylka v příčném směru na určité budící frekvenci a zároveň také výchylka v podélném směru na budící frekvenci rovné dvojnásobku budící frekvence ve směru příčném. Pracovně byl označen podélný směr (směr proudění vzduchu) písmenem u a směr příčný (směr kolmý na proudění vzduchu) písmenem v . Optimalizační funkce, která podchytila výše uvedené předpoklady, má následující tvar:

$$\psi(f, X) = \int_{f_0}^{f_2} v_{\max}(f, X) df + \int_{2f_0}^{2f_2} u_{\max}(f, X) df \quad (9.1)$$

Funkce popisuje to, že z amplitudo-frekvenčních spekter (funkce $v_{\max}(f, X)$ a $u_{\max}(f, X)$) v obou směrech na určitém frekvenčním rozsahu zaujímá plocha pod křivkou určitou hodnotu. V rámci optimalizace byla hledána taková kombinace zaplavení X , pro kterou je plocha pod křivkami vyjadřující maximální amplitudy výchylky nejmenší. Tedy taková kombinace X , na kterých má optimalizační funkce minimální hodnotu. Optimalizace byla realizována na diskrétní úrovni z dat harmonické analýzy. Před samotnou optimalizací bylo nutné z A-f spekter v obou směrech kmitavého pohybu složit jedno spektrum tak, aby odpovídalo optimalizační funkci. Toto složené spektrum znázorňuje obr. 13, na kterém je zřetelně vidět, že na určité frekvenci vznikají nové rezonanční stavy.

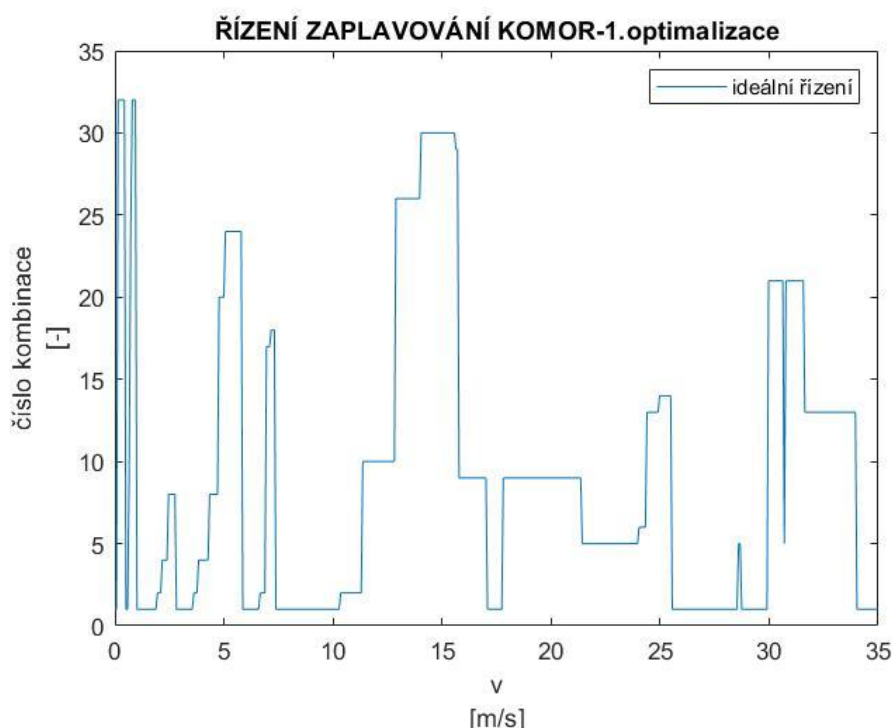


Obr. 13- Složené amplitudo-frekvenční spektrum vyjádřené pomocí optimalizační funkce

9.2 Optimalizace a její výsledky

Výstupem optimalizace je diagram řízení zaplavování komor prutového tělesa. Vstupním parametrem programu řízení zaplavování komor je rychlost proudění vzduchu, protože se dá snadno změřit. Na základě tohoto parametru software vyhodnotí, jakou optimální kombinaci zaplavení komor pro danou rychlost větru zvolit (obr. 14). Z tohoto důvodu výsledky optimalizace nebyly vyjádřeny v závislosti na budící frekvenci, ale na rychlosti proudění vzduchu. Přepočet budící frekvence na danou rychlost proudění je možné realizovat opět přepočtem pomocí Strouhalova čísla, který je dán vztahem (9.2). Kde D [m] je průměrem sloupu, St je hodnota Strouhalova čísla, v [$m \cdot s^{-1}$] je rychlost proudění a f [Hz] je budící frekvence.

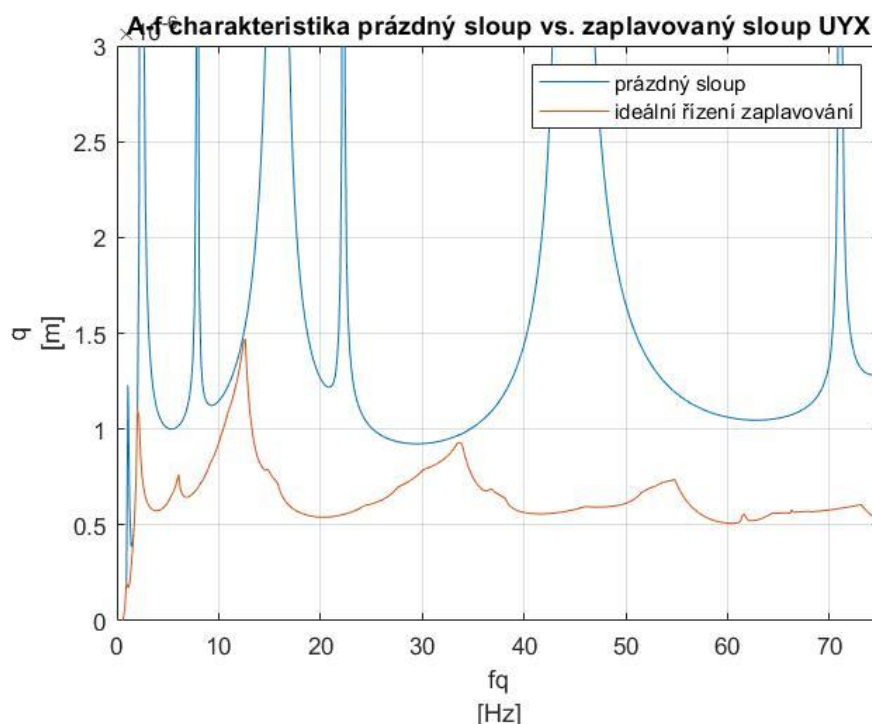
$$v_i = \frac{f_i \cdot D}{St} \quad (9.2)$$



Obr. 14- Diagram řízení zaplavování komor-výsledek optimalizace

Z 32 možných kombinací se v daném rychlostním rozsahu využije pouze 19. Vliv této optimalizace na sloup buzený odtrháváním vírů o rychlosti proudění v rozsahu $0-35 m \cdot s^{-1}$ je možné pozorovat na grafu A-f charakteristiky z obr. 15. Na tomto grafu je znázorněno porovnání maximální amplitudy výchylky prázdného sloupu se sloupem, který řízeně mění svou vlastní frekvenci přidanou hmotností na základě dat řízení z optimalizace. Z A-f charakteristik zaplavovaného sloupu je patrné okamžité snížení výchylky těsně před nástupem na rezonanční frekvenci, čehož bylo dosaženo změnou kombinace zaplavení. Poměrově je také amplituda výchylky řízeně zaplavovaného sloupu mnohem nižší, než kdyby sloup stejných rozměrů zaplavován nebyl. Z porovnání těchto A-f charakteristik je patrný význam optimalizace, jelikož je dopad na konstrukci vlivem buzení Karmánovými víry minimalizován.

Řízeně zaplavovaný sloup se prakticky nemůže dostat do stádia rezonance, protože se neustále mění jeho vlastní frekvence v závislosti na rychlosti proudění vzduchu okolo něj.

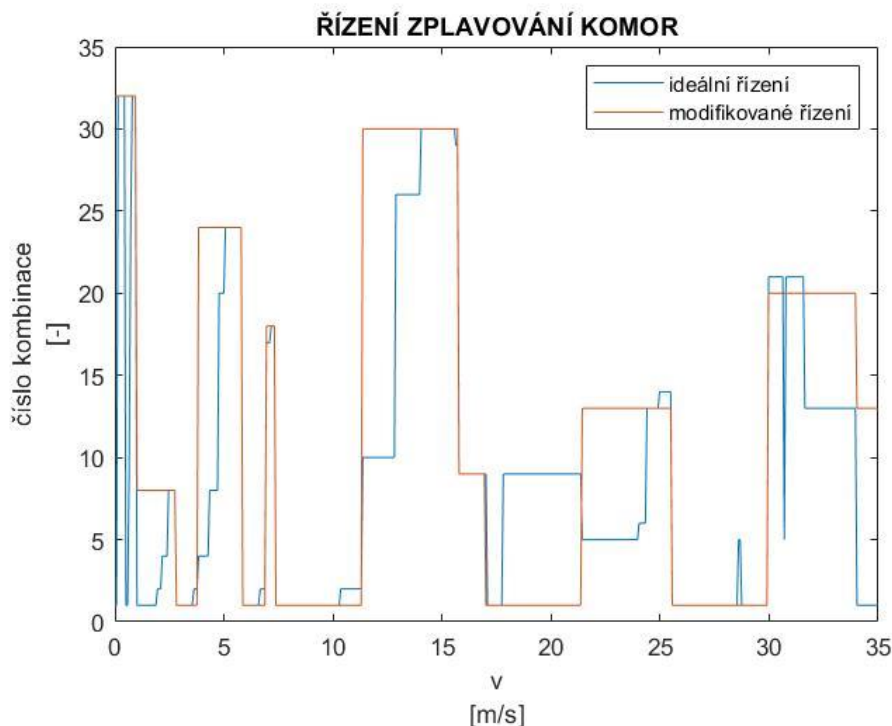


Obr. 15- Porovnání A-f charakteristik prázdného sloupu s řízeně zaplavovaným sloupem

9.3 Modifikace optimalizace a její výsledky

Podíváme-li se na diagram znázorňující řízení zaplavení komor z obr. 14, je předem jasné, že řízení zaplavení ideálním způsobem je zbytečně komplikované a realizovat zaplavování na 19 využitých kombinací je z praktického hlediska poměrně těžce proveditelné. Musíme brát v úvahu, jakým způsobem by mohla v praxi být kapalina do dutiny dodávána, aby došlo k jejímu zaplavení. Prakticky jediná možnost je využití čerpadla. Může zde ale nastat problém, že čerpadlo nebude schopno adekvátně přečerpávat kapalinu z dutin podle potřebné konfigurace zaplavení, jak je požadováno. Proto byla provedena modifikace optimalizace s cílem zjednodušit řízení zaplavování komor a zároveň výrazně nezhoršit odezvu na buzení způsobeným vzdušnými víry.

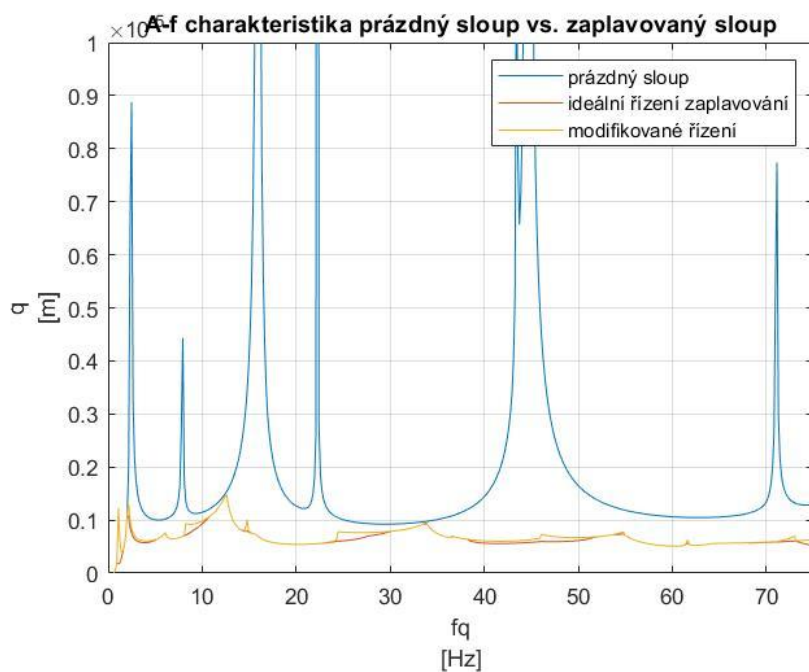
V rámci modifikace této optimalizace se postupovalo iteračně. Nejdřív se na určitém rozsahu rychlostí proudění sjednotilo řízení pod jednou kombinací zaplavení, a následně se zkontrolovala odezva nově řízeného sloupu. Kombinace se neměnily nahodile, ale vždy se volila jedna kombinace, která na daném rozsahu převládala. Zpětně se kontrolovalo, zda náhodou nedochází na zvolené nadřazené kombinaci k rezonančnímu stavu, který by byl nežádoucí. Tímto způsobem se po jednotlivých úsecích zjednodušil diagram řízení na úkor mírného zhoršení odezvy (výchylky). Modifikovanou verzi optimalizace řízení, v porovnání s původním, znázorňuje obr. 16.



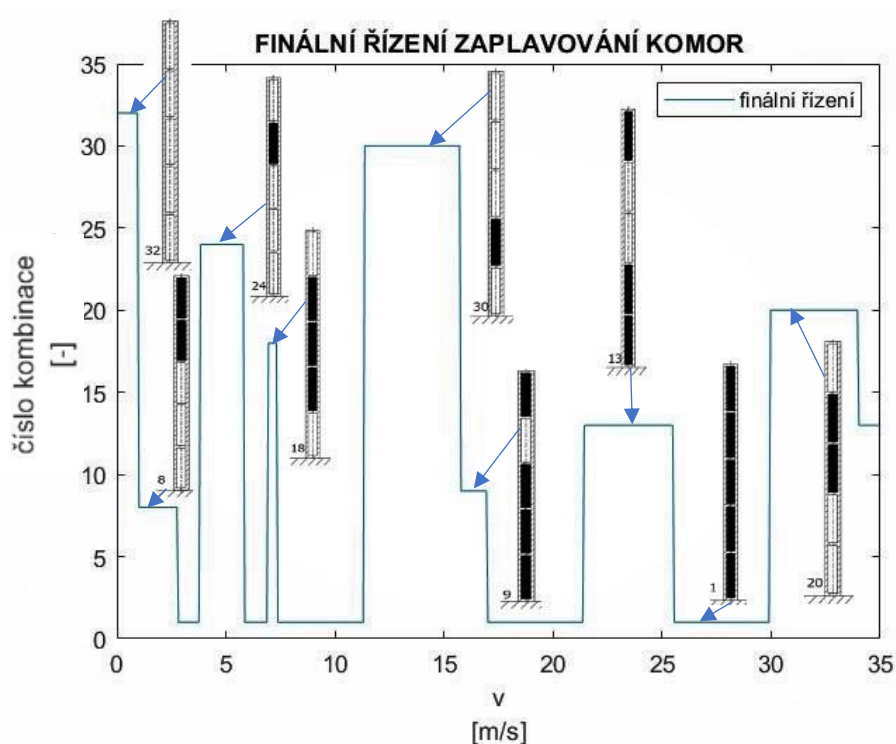
Obr. 16- Porovnání prvotního návrhu řízení s modifikovaným řízením

Jak je vidět na obr. 16, řízení se v důsledku modifikace optimalizace výrazně zjednodušilo. Oproti původním 19 využitým kombinacím zaplavení jich nové řízení využívá pouze 9. Takto zjednodušené řízení se bude lépe realizovat v praxi, vzhledem k jednoduššímu nastavení zaplavení komor. Abychom zjistili, do jaké míry se zhoršila tímto zjednodušením odezva prutového tělesa (sloupu) na buzení, byla vykreslena A-f charakteristika sloupu se zjednodušeným řízením zaplavení do obr. 17. Z tohoto průběhu je vidět, že po zjednodušení řízení došlo k nárůstu amplitudy výchylky v určitých místech. Toto zvýšení je ovšem přijatelné, jelikož se stále svou amplitudou výchylky drží pod A-f charakteristikou nezaplaveného sloupu.

Podobu kombinací zaplavení komor znázorňuje obr. 18, kde je výsledné řízení doplněno o schéma sloupu při dané konfiguraci. Konfigurace odrážejí své číselné přiřazení, jak bylo zavedeno v tab. 2. Černé pole na značce sloupu znamená zaplavenou komoru, prázdné pole pak prázdnou komoru. Obrázek slouží hlavně k vizualizaci jednotlivých kombinací, jelikož samotné jejich číselné označení nám o finální podobě nic neřekne.



Obr. 17- Porovnání A-f charakteristik sloupu s ideálním řízením a zjednodušeným řízením



Obr. 18- Vizualizace jednotlivých druhů kombinací využitých ve finálním řízení zaplavování komor.

Tím bylo dosaženo optimálního řízení zaplavování komor na sloupu daných rozměrů, který je obtékán vzduchem o rychlosti $0-35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ s ohledem na praktickou realizaci.

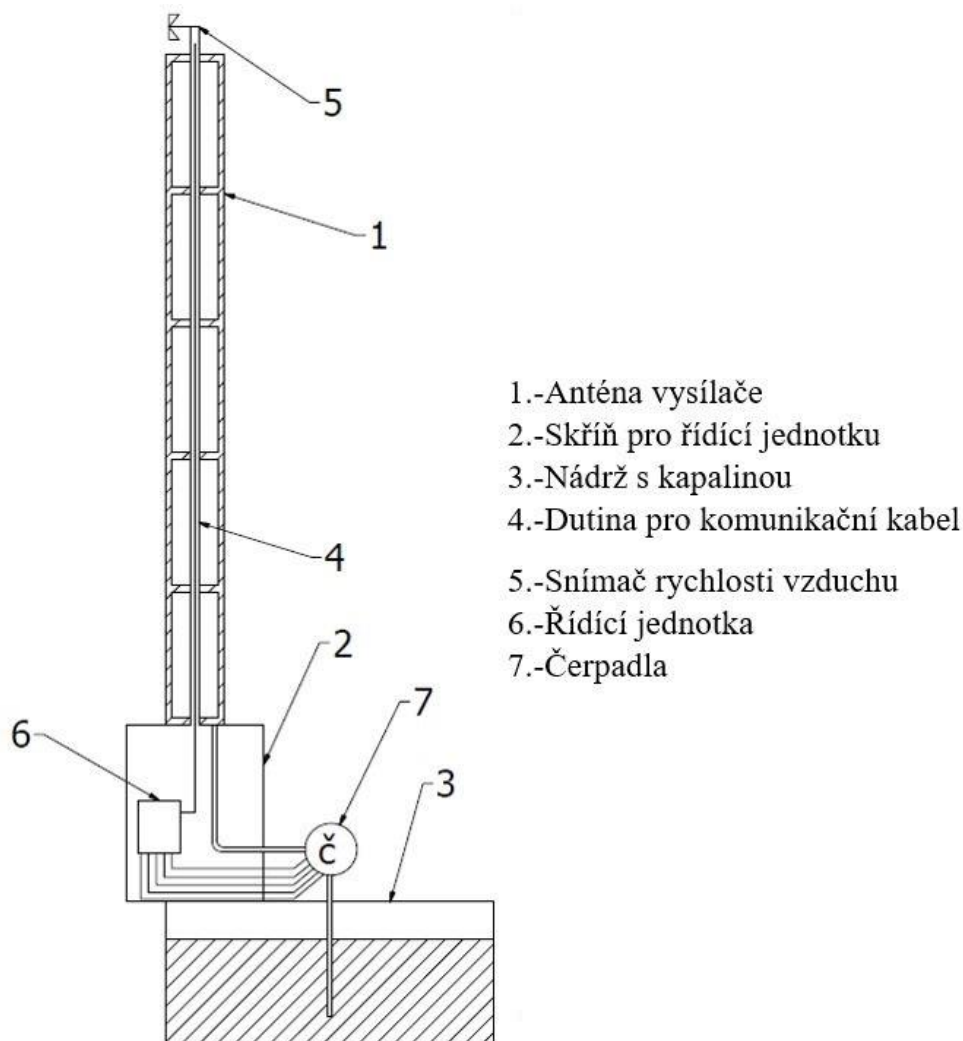
10 DISKUZE NAD MOŽNÝM PRAKTICKÝM VYUŽITÍM

Způsob snižování amplitudy výchylky během harmonické odezvy změnou rozložení hmotnosti v tělese je poměrně nový a dosud se s ním v praxi setkáme velmi málo. V této kapitole bude pojednáno o možném využití tohoto způsobu řešení a zhodnocení, do jaké míry jsou tyto výsledky použitelné v praktickém využití.

10.1 Aplikace v anténě vysílače

Vysílače signálu jsou jednou z konstrukcí, která je přímo ohrožená působením vzdušných vírů. Představme si vysílač jako věž, ze které vyčnívá anténa, která slouží k vysílání a příjmu dat. Konstrukce této antény se shoduje, co se týče tvaru i okrajových podmínek, s prutovým tělesem, na kterém byly provedeny analýzy s následnou optimalizací.

Realizaci této metody snížení amplitudy výchylky můžeme sledovat na schématu z obr. 19.



Obr. 19-Schéma praktické realizace metody zaplavování dutin-anténa vysílače

V následujícím odstavci je popsána funkce systému z obr. 19:

Nejdříve snímač rychlosti, umístěný na konci antény, změří aktuální rychlost proudění vzduchu. Informace o rychlosti převezme řídicí jednotka a využije je jako vstupní hodnoty. Na základě vstupních hodnot řídicí program vyhodnotí situaci a předá informaci jednotlivým čerpadlům, která následně zaplní nebo vyprázdní požadované komory. Jelikož je třeba, aby

změna hmotnosti proběhla rychle, musí se jednotlivé komory zaplavovat nebo vypouštět nezávisle na sobě. Z tohoto důvodu má každá komora své vlastní čerpadlo, které je propojeno s řídicí jednotkou.

Snaha o výrazné snížení vibrací v prutovém tělese (anténě vysílače) nemá za cíl pouze zvýšení životnosti tohoto tělesa. V případě, že na vrcholku bude instalován integrovaný kamerový systém nebo jiné optické zařízení, které by mělo poskytovat přesná data např. pro meteostanici, dosáhneme za pomoci snížení vibrací vyšší kvality obrazu, přesnějších dat a lze zamezit ovlivnění měření vlivem vlastního kmitání tělesa.

10.2 Větrná elektrárna

Další aplikací je instalace podobného zařízení do tubusů větrných elektráren. Trendem posledních let je výstavba mořských (offshore) větrných elektráren. [13] Rozměry turbín zde nejsou přímo omezeny prostředím, jak je tomu ve vnitrozemí. Z důvodu maximálního využití větrné energie dosahují turbíny velkých rozměrů. Tubus turbíny, částečně ponořený pod hladinou, je rozkmitáván odtrháváním vzdušných i vodních vírů. Snížení těchto vibrací pomůže stabilizovat vlastní zařízení elektrárny, nacházející se v gondole na vrcholu tubusu. (kapalina)

Některé firmy experimentují s tzv. odlehčenou konstrukcí tubusu, která by ulehčila přepravu a následnou instalaci celé elektrárny. [14] Vlivem lehčí konstrukce hrozí vyšší míra rozkmitávání. U stávajících odlehčených tubusů větrných turbín, omezují toto rozkmitávání pouze kotevní lana. Jejich účinek by nemusel dostačovat, převážně ve vysokých rychlostech větru, za zvážení proto stojí metody představené v této práci. Ty by mohly jednak vibrace dále minimalizovat a prodloužit tak životnost celé konstrukce, jednak zabránit havarijní situaci v extrémních podmínkách.

10.3 Další postup při realizaci v praxi

Dosažené výsledky je třeba před samotnou realizací této metody ještě ověřit experimentálně na reálném modelu. Dále se nabízí ještě další optimalizace, jejímž cílem by bylo zjistit optimální počet komor buzeného sloupu. Tato optimalizace by obnášela několik analýz různých sloupů s odlišným počtem komor z jejichž výsledků bychom mohli následně získat co nejmenší počet komor, na kterém bude snížení amplitudy výchylky ještě znatelně fungovat. Zároveň by se tak snížila cena celého systému. Tyto analýzy by byly provedené stejným postupem, jaký byl využit v této práci.

11 ZÁVĚR

V rámci bakalářské práce byla řešena problematika optimalizace modálních vlastností obtékaného prutového tělesa, s ohledem na zamezení vzniku rezonančního stavu kmitavého pohybu tělesa způsobeného odtrháváním Karmánových vírů. V rešeršní studii byl popsán způsob vzniku vírů při obtékání tělesa vzduchem a jejich působení na těleso jako celek.

Dále byly odvozeny vztahy pro určení vlastních frekvencí analyzovaného prutového tělesa na základě Bernoulliho-Eulerovi teorie ohybového kmitání prismatického nosníku. Pomocí odvozených vztahů byly určeny vlastní frekvence analyzovaného prutového tělesa pro první tři tvary kmitavého pohybu, které byly následně použity k odladění výpočtového modelu prutového tělesa pro výpočty MKP.

V rámci rešeršní studie byla také prezentována různá opatření, která mohou snížit dopad působení Karmánových vírů na konstrukci. Jedním z nich byla změna modálních vlastností tělesa prostřednictvím změny jeho hmotnosti, která byla realizována zaplavením komor v konkrétních částech prutového tělesa.

Prostřednictvím MKP byla realizována modální a harmonická analýza na modelu prutového tělesa. Z výsledků modální analýzy bylo zjištěno, že v daném rozsahu budicích frekvencí můžeme očekávat 8 tvarů kmitavého pohybu pro plně zaplavené prutové těleso a 5 tvarů pro zcela prázdné prutové těleso. Výsledky harmonické analýzy poskytly amplitudo-frekvenční charakteristiky jakožto odezvu na silové působení způsobené odtrháváním Karmánových vírů.

Pomocí optimalizace byly nalezeny vhodné kombinace zaplavení komor na jejichž základě byl vytvořen diagram řízení zaplavyování komor. Z 32 kombinací zaplavení komor se ve skutečnosti v daném rozsahu budicích frekvencí uplatní pouze 19. Vzhledem k složité realizaci v praxi bylo výsledné řízení zjednodušeno z 19 kombinací na pouhých 9, a to za cenu mírného zhoršení odezvy (nárůstu výchylky) prutového tělesa na silové působení.

V poslední části této práce bylo navrženo možné využití dosažených výsledků v praxi.

POUŽITÉ LITERÁRNÍ ZDROJE

- [1] - ÅKESSON, Björn. *Understanding Bridge Collapses*. London: Taylor and Francis Group, 2008. ISBN 978-0-415-43623-6
- [2] – KANEKO S., T. NAKAMURA, F. INADA, M. KATO *Flow-Induced Vibrations: Classifications and Lessons from Practical Experiences*. Oxford: Elsevier, first edition, 2008. ISBN: 978-0-08-044954-8
- [3] – VAN DYKE, Milton. *An Album of Fluid Motion*. Stanford: The Parabolic Press, fourth edition, 1988. ISBN: 0-915760-02-9
- [4] – VON KÁRMÁN, Theodore. *Aerodynamics*. London: McGraw-Hill Paperback, 1963. ISBN: 07-067602-x
- [5] – JANALÍK, J., *Hydrodynamika a hydrodynamické stroje*. Skripta, Ostrava: VŠB – TU, FS, 2008, 189 str.
- [6] – ZDRAVKOVICH M.M., *Review and Classification of Various Aerodynamic and Hydrodynamic Means for Suppressing Vortex Shedding*. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1981, 7, 145-189
- [7] – WOOTON, LR; WALSH, DE, *Preventing Wind-Induced Oscillations of Structures of Circular Section*, *ICE Proceedings*, 47, 1970, 1-24
- [8] – BREPTA R., L. PŮST, F. TUREK, *Mechanické kmitání: Technologický průvodce 71*, Praha: SOBOTÁLES, 1994. ISBN: 80-901684-8-5
- [9] - SLAVÍK, J. *Počítačové metody mechaniky*. skripta Brno: VUT-FSI-Ústav mechaniky těles, 2001
- [10] – EFUNDA, Aluminium alloy A413.0: Mechanical properties, In: *eFunda: Properties of Aluminium alloys* [online], [cit. 2020-04-12], Dostupné z: http://www.efunda.com/materials/alloys/aluminum/show_aluminum.cfm?ID=AA_413.0A&show_prop=all&Page_Title=A413%2E0
- [11] - Mapa extrémních nárazů větru na území ČR. In: *ÚSTAV FYZIKY ATMOSFÉRY AV ČR, v. v. i.* [online]. Ústav fyziky atmosféry AV ČR, 2011, 2016 [cit. 2020-05-14]. Dostupné z: <http://vitr.ufa.cas.cz/extremni-vitr/>
- [12] – SHIGLEY, Joseph, C. MISHKE, R. BUDINAS. *Konstruování strojních součástí*. 9. vydání. Brno: VUTUM, 2010. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [13] - KOČ, Břetislav. Větrné elektrárny VIII.: Mořské (offshore) větrné elektrárny. *Tzb-info: Větrná energie (obnovitelná energie)* [online]. Top info s.r.o, 2001, 16.1.2017 [cit. 2020-06-22]. Dostupné z: <https://oze.tzb-info.cz/vetrna-energie/15249-vetrne-elektrarny-viii-morske-offshore-vetrne-elektrarny>
- [14] - KOČ, Břetislav. Větrné elektrárny IX.: Netradiční i staronová řešení a slepé uličky. *Tzb-info: Větrná energie (obnovitelná energie)* [online]. Top info s.r.o, 2001, 12.3.2018 [cit. 2020-06-22]. Dostupné z: <https://oze.tzb-info.cz/vetrna-energie/17071-vetrne-elektrarny-ix-netradicni-i-staronova-reseni-a-slepe-ulicky>

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

F	$[N]$	odporová složka síly
F_{vz}	$[N]$	vztlačková složka síly
S_t	$[-]$	Strouhalovo číslo
R_e	$[-]$	Reynoldsovo číslo
C	$[-]$	odporový součinitel
v	$[m \cdot s^{-1}]$	rychlost
f_s	$[Hz]$	frekvence odtrhávání vírů
η	$[Pa \cdot s]$	dynamická viskozita
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
D	$[m]$	vnější průměr sloupu
l	$[m]$	délka sloupu
t	$[m]$	tloušťka stěn sloupu
A	$[m^2]$	plocha příčného průřezu
Q	$[N]$	posouvající síla
w	$[m]$	průhyb nosníku
c	$[m \cdot s^{-1}]$	rychlost šíření podélných vln v tenké tyči
j	$[m]$	kvadratický poloměr
E	$[Pa]$	Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku
G	$[Pa]$	Youngův modul pružnosti ve smyku
μ	$[-]$	Poissonův poměr
q	$[m]$	amplituda výchylky
α	$[rad \cdot s^{-2}]$	úhlové zrychlení
Ω	$[rad \cdot s^{-1}]$	úhlová vlastní frekvence kmitavého pohybu
ψ	$[rad]$	úhel pootočení
δ	$[rad]$	úhel zkosu
φ	$[rad]$	natočení prvku
f_v	$[Hz]$	vlastní frekvence kmitavého pohybu
U_x	$[m]$	posuv v ose x
U_y	$[m]$	posuv v ose y
U_z	$[m]$	posuv v ose z
ROT_x	$[rad]$	rotace okolo osy x
ROT_y	$[rad]$	rotace okolo osy y
ROT_z	$[rad]$	rotace okolo osy z

σ_a	[Pa].....	amplituda napětí
A-f.....		amplitudo-frekvenční
MKP.....		metoda konečných prvků

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1- Odtřžení mezní vrstvy na zakřiveném povrchu tělesa.....	12
Obr. 2- Fotografie, na které je zachycena Karmánova vírová stezka.....	13
Obr. 3- Závislost $St=f(Re)$	14
Obr. 4- Závislost $C=f(Re)$ pro válcové těleso.....	15
Obr. 5- Opatření proti vlivu Karmánových vírů na konstrukci.....	16
Obr. 6- Uvolněný prvek příčně kmitajícího nosníku.....	17
Obr. 7- Amplitudo-frekvenční charakteristika prázdného a zaplněného sloupu.....	22
Obr. 8- Schéma sloupu.....	23
Obr. 9- Závislost velikosti amplitudy silového působení na rychlosti proudění vzduchu v podélném směru.....	32
Obr. 10- Závislost velikosti amplitudy silového působení na rychlosti proudění vzduchu v příčném směru.....	32
Obr. 11- Amplitudo-frekvenční spektrum pro kmitavý pohyb v podélném směru.....	32
Obr. 12- Amplitudo-frekvenční spektrum pro kmitavý pohyb v příčném směru.....	33
Obr. 13- Složené amplitudo-frekvenční spektrum vyjádřené pomocí opt. Funkce.....	33
Obr. 14- Diagram řízení zaplavyování komor-výsledek optimalizace.....	35
Obr. 15- Porovnání a-f charakteristik prázdného sloupu s řízeně zaplavovaným.....	36
Obr. 16- Porovnání prvotního návrhu řízení s řízením optimalizovaným.....	37
Obr. 17- Porovnání a-f charakteristik sloupu s ideálním řízením a zjednodušeným řízením.....	38
Obr. 18- Znázornění jednotlivých druhů kombinací využitých ve finálním řízení.....	38
Obr. 19- Schéma praktické realizace metody zaplavyování dutin-anténa vysílače.....	39

SEZNAM TABULEK

Tab. 1- Materiálové vlastnosti.....	27
Tab. 2- Kombinace zaplavených komor.....	30
Tab. 3- Hodnoty vlastních frekvencí určené modální analýzou pomocí MKP.....	31
Tab. 4- Porovnání výsledků analytického řešení a MKP u prázdného sloupu.....	31